大学編入学試験問題集（数学）

群馬工業高等専門学校数学科

2011 年 3 月

目 次

基礎数学

1 基礎数学

1.1 $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11$ のように p_n で n 番目の素数を表すとする. 次の問いに答えよ.

(1) $1 + p_1 \cdots p_n$ を割る最小の素数を p とすると,

$$p_{n+1} \leq p \leq 1 + p_1 \cdots p_n$$

が成り立つことを示せ.

(2) n 番目の素数は $2^{2^{n-1}}$ 以下であることを帰納法で示せ.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221305)

1.2 (1) 不等式 $3x^2 + x > 2$ を解け.

(2) x の変域を $-\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 1$ としたとき, 二次関数 $f(x) = 3x^2 + x - 1$ の最大値と最小値を求めよ.

(群馬大 22)　　(固有番号 m221501)

1.3 $a_1 = 3\,,\ a_{n+1} = 4a_n + 6 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられる数列について, 以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n - \alpha\}$ が等比数列になるように, α を定めよ.

(2) (1) を利用して, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(群馬大 22)　　(固有番号 m221502)

1.4 $3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 4x + 7$ をある整数 A で割ったところ, 商 $x^2 + 2$, 余り $6x + 1$ であった.

(1) 整式 A を求めよ.

(2) $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 4x + 7$ としたとき, $-100 \leqq x \leqq 100$ の範囲において $f(x) = 0$ となるような x が少なくとも 1 個あることを示せ.

(群馬大 22)　　(固有番号 m221504)

1.5 空でない集合 X について考える. X の部分集合全体からなる集合を P とし, X から $\{0, 1\}$ への写像全体の集合を F とする. ここで, $\{0, 1\}$ は整数 0 と 1 からなる集合を表す. F の要素 f, g に対し, X の上で定義された関数 $f * g\,,\ f \square g$ を

$$(f * g)(x) = f(x)g(x)\,, \quad (f \square g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x)\,, \quad x \in X$$

で定める. また, $A \in P$ に対して, $I_A \in F$ を

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ のとき}, \\ 0 & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定め, 写像 $\Phi : P \to F$ を $\Phi(A) = I_A$ と定義する. 以下の各問に答えよ.

(1) $f, g, h \in F$ に対し, 次の等式を示せ.

$$f * (g \square h) = (f * g) \square (f * h)\,, \quad (f \square g) \square h = f \square (g \square h)$$

(2) $A,\ B \in P$ に対し、次の等式を示せ.

$$\Phi(A \cap B) = \Phi(A) * \Phi(B)\,, \quad \Phi(A \cup B) = \Phi(A) \square \Phi(B)$$

(3) Φ は全単射であることを示せ.

(茨城大 22)　　(固有番号 m221707)

1.6 n を自然数とするとき,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ.

(山梨大 21)　　(固有番号 m211806)

1.7 集合 X から集合 Y への全射 $f : X \to Y$ について, 次の問いに答えよ.

(1) X の元 $a,\ b$ が $f(a) = f(b)$ をみたすとき $a{\sim}b$ と書く. この関係$\sim$は同値関係であることを示せ.

(2) (1) の同値関係$\sim$による商集合を $X/\sim$ で表すとき, $X/\sim$ から $Y/\sim$ への全単射が存在することを示せ.

(富山大 22)　　(固有番号 m222307)

1.8 数列の和の公式で (　　) の中に入る式を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\Big) = n^3$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\Big) = n \times 2^{n+1}$

(福井大 22)　　(固有番号 m222412)

1.9 x, y 平面上に, 中心を点 (a, b) とし, 半径が r の円 A がある. A の外部にある原点 $O(0, 0)$ から, A に引いた 2 本の接線の接点を P, Q とするとき, 以下の (1),(2) に答えよ.

(1) 直線 PQ の方程式を求めよ.

(2) 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ.

(三重大 22)　　(固有番号 m223115)

1.10 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ の逆関数を求めよ.

(長崎大 22)　　(固有番号 m225001)

1.11 (1) 次の命題を数学的帰納法により証明しなさい.

「任意の自然数 n に対して, $n^3 + 2n$ は 3 で割り切れる」

(2) 次の命題を背理法により証明しなさい.

「自然数 n が, 2 または 3 で割り切れないならば, 6 でも割り切れない」

(熊本大 22)　　(固有番号 m225201)

1.12 (1) 次の 2 進数を 10 進数へ変換せよ.

1101.1011

(2) 次の 10 進数を 2 進数へ変換せよ.

0.9

(3) 次の 8 ビットの 2 進数の 2 の補数を求めよ. ただし, 2 の補数は 8 ビットの 2 進数で表現せよ.

01011110

(4) 2 つの 10 進数 $x = 11,\ y = 13$ を 5 ビットの 2 進数へ変換し, 次の演算をせよ. ただし, 演算結果は 5 ビットの 2 進数で表現せよ.

$(a)\ x + y$ $(b)\ x - y$

(島根大 22) (固有番号 m225811)

1.13 (1) 3 方程式 $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ を満たすすべての解を求めよ.

(2) 10 進数表記したとき 13 となる数を 2 進数で表記せよ.

(3) 72 の約数の個数は全部でいくつあるか.

(4) 複素数 $\dfrac{1}{2+2i} + \dfrac{1}{1-3i}$ の実部と虚部を答えよ. (i : 虚数単位)

(5) a を正の実数とするとき, $\dfrac{a^2+4}{a}$ の最小値を求めよ.

(東京工科大 22) (固有番号 m226901)

1.14 x, y は正の値をとる実数の変数とし, $\log_2(2x^2y) = 2$ を満たしているとする.

(1) $x = 1$ のとき, $\log_2(2x^2y) = 2$ を満たす実数 y の値を求めよ.

(2) $\log_2 y = -2\log_2 x + 1$ となることを示せ.

(3) $z = (\log_2 y)^2 + 12\log_2 x - 3$, $X = \log_2 x$ とするとき, $z = 4X^2 + 8X - 2$ となることを示せ. また, z の最小値とそのときの $x,\ y$ の値を求めよ.

(東京工科大 22) (固有番号 m226906)

1.15 整数 $m,\ n \geqq 0$ に対する次の再帰関数について, あとの問いに答えなさい. 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A(m,\ n) = \begin{cases} 2n & ,m = 0 \text{ のとき} \\ 0 & ,m \geqq 1 \text{ かつ } n = 0 \text{ のとき} \\ 2 & ,m \geqq 1 \text{ かつ } n = 1 \text{ のとき} \\ A(m-1,\ A(m,\ n-1)) & ,m \geqq 1 \text{ かつ } n \geqq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

(1) $A(1, 2)$ を答えなさい.

(2) 整数 $m \geqq 1$ について, $A(m,\ 1)$ を答えなさい.

(3) 整数 $m \geqq 1$ について, $A(1,\ n) = 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい.

(4) 整数 $m \geqq 1$ について, $A(m,\ 2)$ を答えなさい.

(岩手県立大 22) (固有番号 m227001)

微分積分 I

2 微分

2.1 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (2x-3)^5$ (2) $y = \sin x^2$

(3) $y = (x^2+1)\log(x^2+1)$ (4) $y = e^{-2x}\cos x$

(北見工業大 22) (固有番号 m220201)

2.2 (1) 関数 $y = -x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 6x - 1$ のグラフを描き, 極値を求めよ.

(2) (1) の関数の $x=0$ および $x=2$ における接線を求め, その交点の座標を求めよ.

(北見工業大 22)　　(固有番号 m220202)

2.3 次の極限を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

以下の arcsin は逆正弦関数のことで, $\sin^{-1}$ と表されることもある.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\boxed{(\text{キ})}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{\boxed{(\text{ク})}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)}{x}=\boxed{(\text{ケ})}$

(秋田大 22)　　(固有番号 m220402)

2.4 x を非負の実数, r を $0<r<1$ を満たす実数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=xr^x$$

と定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の増減表を書き, 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) n を正の整数とし, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n=f(n-1)$ により定義する. このとき, 初項から第 n 項までの和を求めよ.

(東北大 22)　　(固有番号 m220501)

2.5 次の関数を微分せよ.

(1) x^{x^x}

(2) $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$　（主値でかんがえること）

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220601)

2.6 次の関数 $f(x)$ について以下の問いに答えよ.

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\le 0\\ x\cos x & x>0\end{cases}$$

(1) 関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続か？

(2) 関数 $f(x)$ は微分可能か？ 微分可能ならば導関数を記しなさい.

(3) 関数 $f(x)$ は $x=0$ で何回まで微分可能か？

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220609)

2.7 次の極限値を求めなさい. ただし, a は定数である.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{1+\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

(千葉大 22)　　(固有番号 m221201)

2.8 (1) つぎの関数を微分せよ.

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$$

(2) つぎの関数の第 n 次導関数を求めよ.

$$y = (x+1)^2 \log(x+1)$$

(埼玉大 22)　　(固有番号 m221405)

2.9 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

で定義される. この定義を用いて, $f(x) = x^3$ の導関数は $f'(x) = 3x^2$ となることを示しなさい.

(山梨大 22)　　(固有番号 m221803)

2.10 (1) $y = x^n$ を n 回微分せよ. なお, n は正の整数である.

(2) $y = \sin x$ を n 回微分せよ.

(3) α は任意の実数で $x > 0$ とする. $y = x^\alpha$ のとき, $y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ であることを与式の両辺の対数を取って示せ.

(4) (3) と同様の方法を用いて $y = x^2\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ を微分せよ.

(新潟大 22)　　(固有番号 m222001)

2.11 以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin x - \log(x+1)}$$

(新潟大 22)　　(固有番号 m222004)

2.12 点 $P(0,-1)$ から曲線 $y = 4x^2$ に引いた接線の方程式, および接点の座標を求めよ.

(新潟大 22)　　(固有番号 m222011)

2.13 関数 $\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) 公式 $\dfrac{d}{dy}\tan y = \tan^2 y + 1$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を利用して

$$(x^2+1)f'(x) = 1 \quad (-\infty < x < \infty)$$

となることを示せ.

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成立することを示せ.

(3) $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, 微分係数 $f^{(2m+1)}(0)$ の値を求めよ.

(金沢大 22)　　(固有番号 m222202)

2.14 次の微分をしなさい.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

(金沢大 22)　　(固有番号 m222209)

2.15 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}x^2e^{-2x}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\log(\tan x)$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(3) $\dfrac{d}{dx}(\cos x)^x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(富山大 22)　　(固有番号 m222301)

2.16 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin^3(4x)$　　(2) $y = x^{\frac{1}{x}}$　　(福井大 22)　　(固有番号 m222401)

2.17 実数 x が $x \neq 2$ を満たすとき, $k = x + \dfrac{4}{x-2}$ の取りうる値の範囲を求めよ.

(福井大 22)　　(固有番号 m222411)

2.18 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+2}{3n^2+4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n} - 3n\right)$　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(福井大 22)　　(固有番号 m222413)

2.19 次の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{b}{ax+b} + \log|ax+b|$　　(2) $\sin^{-1} x$　　(3) a^x

(福井大 22)　　(固有番号 m222415)

2.20 次の関数について以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(2) $f(x)$ の一次導関数を $f'(x)$ とする. $f'(0)$ の値を求めよ.

(豊橋技科大 22)　　(固有番号 m222703)

2.21 (1) 次式が成り立つような定数 a の値を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty} \left(x + a - \sqrt{x^2+x+1}\right) = 1$$

(2) 次の関数を微分せよ.

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

(豊橋技科大 23)　　(固有番号 m232705)

2.22 以下の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin^2 x$　　(2) $y = \dfrac{1}{(2x-3)^3}$　　(3) $y = \log 3x$

(三重大 22)　　(固有番号 m223113)

2.23 xy 平面上に, 曲線 $C\ :\ y = x^3 + 3x^2 + x$ と点 $A(1, a)$ がある. A を通って C に 3 本の接線が引けるとき, a の値の範囲を求めよ.

(三重大 22)　　(固有番号 m223116)

2.24 関数 $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})\ \ (x > 0)$ に関して次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 22)　　(固有番号 m223202)

2.25 a を負の定数とする. 点 $P(-1,1)$ を通る傾きが a の直線 L と, xy-平面上の曲線

$$C \,:\, y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

について考える. 次の問に答えよ.

(1) L と C がただ 1 つの共有点を持つような a の値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの a の値に対し, L と C の共有点の座標を求めよ.

(奈良女子大 22)　　(固有番号 m223203)

2.26 次の微分を求めよ. ただし, a は正の定数であるとする.

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-ax^2}$$

(奈良女子大 22)　　(固有番号 m223206)

2.27 次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $\tanh x$　　(2) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$　$(-1 < x < 1)$　　(3) $\log_e(\cos x)$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223611)

2.28 以下の (1)(2)(3) の関数について, それぞれ x で微分せよ. ただし a, b は正の定数とする.

(1) $\sin(ax+b)$,　　(2) $\sin^{-1}(ax)$,　　(3) x^x　$(x > 0)$,

(鳥取大 22)　　(固有番号 m223901)

2.29 実数全体を定義域とする関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を考える.

(1) $f(x)^2 - f'(x)^2$ を計算せよ.

(2) $f(x)$ は単調増加であることを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について

$$\left\{f^{-1}(x)\right\}' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

を示せ.

(岡山大 22)　　(固有番号 m224001)

2.30 $\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数 $f(x)$ が $f(0) = a,\ f(x) < a \quad (0 < x \leqq 1),\ f'(0) \neq 0$ を満たすとする.

(1) $f'(0) < 0$ であることを示せ.

(2) 関数 $g(x)$ を次のように定める.

$$g(x) = \begin{cases} -f'(0) & (x = 0) \\ \dfrac{a - f(x)}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

このとき, $g(x)$ は $x \geqq 0$ で連続であることを示せ.

(3) ある $C > 0$ が存在して,

$$a - f(x) \geqq Cx \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成立することを示せ.

(広島大 22)　　(固有番号 m224103)

2.31 $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が常に $f''(x) > 0$ を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f'(x)$ は狭義単調増加であることを示せ.

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ のとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

(3) $a < b$, $f(a) = a$ かつ $f(b) = b$ であるとする. このとき, $a < x < b$ ならば $f(x) < x$ であることを示せ.

(4) $b > 0$, $f(0) > 0$, $f(b) = b$ かつ $f'(b) > 1$ であるとする. このとき, 方程式 $f(x) = x$ は, $0 < x < b$ の範囲に解をただ一つ持つことを示せ.

(広島大 23)　　(固有番号 m234101)

2.32 関係式 $y = e^{-x}e^{-y}$ から, $\dfrac{dy}{dx}$ を y のみを用いて表せ.

(広島大 23)　　(固有番号 m234104)

2.33 $x > 0$ とする. $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減, 凹凸および変曲点を調べ, グラフの概形を描け.

(広島市立大 22)　　(固有番号 m224204)

2.34 方程式 $x^2 = 2\sin x$ の $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲における実数解の個数を, 関数 $f(x) = x^2 - 2\sin x$ の増減表と概略図を作成することにより示しなさい.

(山口大 22)　　(固有番号 m224304)

2.35 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x+\sin x-3^x+5x}{x}$ を求めよ.

(2) $f(x) = \sin^3(4x+3)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 22)　　(固有番号 m224402)

2.36 (1) 次の曲線上の与えられた点 (a, b) における接線の方程式を求めよ.

(a) $y = x\log x$,　$(a, b) = (e, e)$　　(b) $y = \dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{e^{3x}+e^{-2x}}$,　$(a, b) = (0, 0)$

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}$　ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ. さらに, $f(x) = c$（定数関数）ならば $f'(x) = 0$ であることを定義に従って示せ.

(愛媛大 22)　　(固有番号 m224601)

2.37 次の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{1}{\tan x}$　　(2) $e^{\sqrt{x}}$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224901)

2.38 次の曲線の概形をかけ.

$$y = x\sqrt{1-x^2}$$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224902)

2.39 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to1}\frac{\log x}{1-x}$$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224907)

2.40 次の関数の極限を求めよ. ただし, $a > 0$ とし, log は自然対数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{\sin x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \log\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224908)

2.41 (1) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

(2) (1) の結果を利用して次の極限を求めよ.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\theta + h) - \cos(\theta)}{h}$$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224913)

2.42 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x - 2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224917)

2.43 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = (ax + b)/(cx + d)$　　(2) $y = x^{-n}$　　(3) $y = (x^2 + 1)^{1/2}$　　(4) $y = \tan x$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224923)

2.44 3 次関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき, $f(x)$ を求めなさい. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である.

$f(-2) = 0$,　　$f(0) = 0$,　　$f'(1) = -5$,　　$f'(-1) = -1$.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224925)

2.45 下記の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

(長崎大 22)　　(固有番号 m225002)

2.46 (1) $e^{a\sqrt{x}}$ の微分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(2) $x^k \sin ax$ の微分を求めよ. ただし, k は整数, a は実定数である.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x}$ を計算せよ. ただし, $a,\ b$ は正定数である.

(長崎大 22)　　(固有番号 m225011)

2.47 次の微分を計算し, 簡単な式で表せ.

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx} \log(\cos x)$　　(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)$

(鹿児島大 22)　　(固有番号 m225401)

2.48 次の微分を求めよ.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)$$

(鹿児島大 22)　　(固有番号 m225406)

2.49 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$　　(2) $y = 2^{3x}$

(首都大 22)　　(固有番号 m225904)

2.50 (1) 関数 $y = e^{\sin x}$ を微分せよ.

(2) $x,\ y$ の関係が次のように媒介変数 t を用いて表されるとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ.

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 3t^2 - t - 2 \end{cases}$$

(宇都宮大 22)　　(固有番号 m226105)

2.51 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つことを利用して, 以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 5x}{x}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2\sin 2x)}{x}$ を求めよ.

(はこだて未来大 22)　　(固有番号 m226303)

2.52 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin 5x \sin 7x}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 22)　　(固有番号 m226506)

2.53 関数 $f(x) = e^x \sin x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(東京工科大 22)　　(固有番号 m226902)

2.54 xy 平面上において, 原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と, 放物線 $C_2 : y = \dfrac{2}{3}x^2 - a\ (a > 1)$ を考える. C_2 の接線のうち, 傾きが $\tan\theta$ となるものを l とし, C_2 との接点を P とする. ただし, θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. また, 原点 O を通り, l と直交する直線を m とし, m と円 C_1 との交点のうち第 4 象限の点を Q とする.

(1) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, θ の値を求めよ. また, このときの点 P の座標が $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3},\ \dfrac{9}{8} - a\right)$ となることを示せ.

(2) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, 直線 m を表わす方程式を求めよ. また, 点 Q の座標を求めよ.

(3) 3 点 $O,\ P,\ Q$ が同一直線上に並ぶための必要十分条件は $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{8}{3}a - 2}$ であることを示せ.

(4) $a = \dfrac{9}{8}$ のとき, C_1 上の点と C_2 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(東京工科大 22)　　(固有番号 m226907)

3 積分

3.1 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 2x + 1)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ \sin x\,dx$

(北見工業大 22)　　(固有番号 m220203)

3.2 xy 平面上の曲線 C が極座標では

$$r = 1 + \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表されるとき, 次の問いに答えなさい.

(1)　曲線 C の概形を図示しなさい.

(2)　曲線 C の囲む面積 S を求めなさい.

(岩手大 22)　　(固有番号 m220305)

3.3　次の定積分を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

以下の arcsin は逆正弦関数, π は円周率, log は底が e である自然対数を意味する.

(1)　$\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{(コ)}\,\pi$　　(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\log 2}{\boxed{(サ)}}\,\pi$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 x^2 \arcsin x\,dx = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\boxed{(シ)}}$

(秋田大 22)　　(固有番号 m220403)

3.4　xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{t}{\pi}\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1)　$t = \dfrac{m}{2}\pi$（ただし $m = 0, 1, 2, 3$）における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け.

(2)　不定積分 $\displaystyle\int t\,\sin^2 t\,dt$ を求めよ.

(3)　曲線 C と x 軸 $(x \geqq 0)$ および y 軸 $(y \geqq 0)$ によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 22)　　(固有番号 m220502)

3.5　次の不定積分を求めよ.

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

(2)　$\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220602)

3.6　平面上に正五角形 D と定点 P がある. 点 P を中心として, 半径 r の円の内部にある D の部分の面積を $S(r)$ とするとき, $S(r)$ が連続関数であることを示せ. さらに, $S(r)$ が D の面積の半分となるような r が存在することも示せ.

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220603)

3.7　次の不定積分を求めなさい.

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220610)

3.8　n を整数として以下の設問に答えよ.

(1)　$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\cos nx\,dx$ を計算せよ.

(2) $f(x)$ を $[0,\ \pi]$ 上の連続関数とする. $f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\cos nx\,dx = 0$$

が成り立つことを示せ. (ここで a は任意の実定数とする.)

(東京工業大 22)　　(固有番号 m220801)

3.9 連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ は, $x \geq 1$ において次の 3 条件を満たすとする.

(a) $f(x) > 0$

(b) $f(x+1) = xf(x)$

(c) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ は単調増加する. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする.

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 積分 $\displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ を求めよ.

(2) $\log t = \displaystyle\int_t^{t+1} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du \quad (t \geq 1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式

$$\log\frac{f(x+1)}{f(2)} \geq x\log x - x + 1 \quad (x \geq 1)$$

が成り立つことを示せ.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221303)

3.10 (1) 区間 $(0,1]$ で定義された実数値連続関数 $f(x)$ で

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^1 |f(x)|^2\,dx = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(2) 区間 $[1,\infty)$ で定義された実数値連続関数 $g(x)$ で

$$\int_1^\infty |g(x)|\,dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \sup_{1\leq x<\infty}|g(x)| = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(埼玉大 22)　　(固有番号 m221404)

3.11 つぎの積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^{11}e^{x^4}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{(x-3)^2(x-2)}\,dx$

(埼玉大 22)　　(固有番号 m221406)

3.12 定積分 $\displaystyle\int_2^6 x\sqrt{x-1}\,dx$ の値を求めなさい.

(山梨大 22)　　(固有番号 m221804)

3.13 $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}|\sin x|\,dx$（ただし $a<0$）を求めたい.

(1) $I_n = \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{ax}|\sin x|\,dx$ としたとき，I_n と I_{n+1} が満たす関係式を求めよ.

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} I_i$ としたとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を I_1 を用いて表現せよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}|\sin x|\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ となる理由を述べよ.

(4) I_1 を実際に計算し, $\displaystyle\int_0^\infty e^{ax}|\sin x|\,dx$ を求めよ.

(新潟大 22)　　(固有番号 m222005)

3.14 放物線 $y = x^2 + x - 1$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を直線 $y = x$ の周りに回転させて出来る立体の体積を求めよ.

(新潟大 22)　　(固有番号 m222010)

3.15 曲線 $y = e^x$, 直線 $y = 3$ および y 軸で囲まれた部分 S の面積を A とする.

(1) S の概形を描き, その面積 A を求めなさい.

(2) $0 < t < \log 3$ とする. S のうちで $t \leqq x \leqq 2t$ の範囲にある部分の面積 $A(t)$ を求めなさい.

(3) t が前問の範囲を動くとき, $A(t)$ の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 22)　　(固有番号 m222102)

3.16 次の不定積分をしなさい.

$$\int x\cos x\,dx$$

(金沢大 22)　　(固有番号 m222210)

3.17 次の計算をせよ.

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx$　　(5) $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$

(富山大 22)　　(固有番号 m222302)

3.18 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \log x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}\,dx$

(福井大 22)　　(固有番号 m222404)

3.19 $y^2 = ax$ と $x^2 = ay \quad (a > 0)$ で囲まれた面積を求めよ.

(福井大 22)　　(固有番号 m222405)

3.20 次の関数を積分せよ.

(1) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$　　(2) $\dfrac{1}{x^2-a^2}$　　(3) $\dfrac{1}{x^2+a^2}$

(4) $x^2\log x$　　(5) $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$

(福井大 22)　　(固有番号 m222416)

3.21 次の関数 $r = a(1+\cos\theta)$, $(a > 0)$ で囲まれた部分の面積 A を求めよ.

(福井大 22)　　(固有番号 m222417)

3.22 $f(x) = x\log x \ \ (x > 0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $\log x$ は x の自然対数である.

(1) x を未知変数とする方程式 $f(x^2) = f(x)$ を解け.

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形を凹凸も考慮して描け.

(3) 不等式 $2f(x) \leqq -\log 2$ を満たす x の範囲を求めよ.

(4)　関数 $y = 2f(x)$ と直線 $y = -\log 2$ のグラフで囲まれる図形の面積 S を求めよ.

(岐阜大 22)　　(固有番号 m222601)

3.23　媒介変数 t を用いて表される次の曲線について, 以下の問いに答えよ.

$$x = \sqrt{3}\sin t$$
$$y = \sqrt{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$$

ただし, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{3}$ である.

(1)　$t = 0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}$ のそれぞれに対応する x-y 座標上の点 A, B および C の座標を示せ.

(2)　この曲線は点 A, B および C を通る楕円の一部を表している. この曲線と x 軸, y 軸の正の部分で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 22)　　(固有番号 m222704)

3.24　(1)　次の不定積分を解け.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

(2)　$x = 2(\theta - \sin\theta),\ \ y = 1 - 2\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について以下の問いに答えよ.

(a)　$y \geqq 0$ となる θ の範囲を求めよ.

(b)　$y \geqq 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 23)　　(固有番号 m232706)

3.25　$\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 1}\,dx$ を計算しなさい.

(名古屋工業大 22)　　(固有番号 m222905)

3.26　次の積分の値を求めよ.

$$I_1 = \int_0^1 \left(\sin^{-1} x\right)^2 dx$$

(名古屋工業大 23)　　(固有番号 m232904)

3.27　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x}\,dx$ を計算せよ.

(名古屋工業大 23)　　(固有番号 m232907)

3.28　曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 9x \quad (0 \leqq x \leqq 4)$ がある. いま, 原点を通る直線を引いたところ, この直線は原点を含めて 3 点で曲線と交わり, 直線と曲線で囲まれた 2 つの領域ができた. この 2 つの領域の面積が等しいとき, この直線の方程式を求めなさい.

(三重大 22)　　(固有番号 m223102)

3.29　次の積分の値を求めなさい. ただし, 定数 a は $a > 0$, e は自然対数の底とする.

$$\int_0^{\infty} xe^{-ax^2}\,dx$$

(三重大 22)　　(固有番号 m223108)

3.30　以下の不定積分を求めよ. 積分定数は C とする.

(1)　$\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$　　　　(2)　$\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

(三重大 22)　　(固有番号 m223114)

3.31 次の定積分を求めよ. ただし, a, b は正の定数であるとする.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx$$

(奈良女子大 22)　　(固有番号 m223207)

3.32 正数 R について, $I(R)=\displaystyle\int_0^R x^3e^{-x^2}dx$ とおく.

(1) 積分 $I(R)$ の値を求めよ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I(R)$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 22)　　(固有番号 m223402)

3.33 x, y は次のような変数 θ の関数である.

$$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta) \qquad (a>0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

2 次元直交座標系 $(x,\,y)$ において, x, y が表す曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい.

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223613)

3.34 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2-4x+7}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x}}$

(鳥取大 22)　　(固有番号 m223904)

3.35 サイクロイド : $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0\,,\ 0\le t\le 2\pi)$ の長さ L を求めよ.

(鳥取大 22)　　(固有番号 m223905)

3.36 関数 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$ は広義積分を用いて定義された実変数 s の関数である。これについて, 以下の問に答えよ.

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ.

(2) $\Gamma(s)$ に対して, x について部分積分をすることによって, 任意の $s>1$ に対して $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$ となることを示せ.

(鳥取大 22)　　(固有番号 m223906)

3.37 (1) n を整数とするとき, $\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ の原始関数を求めよ.

(2) n が 2 以上の整数のとき, 次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2(n-1)}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\leqq\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx\leqq\frac{\pi}{4}$$

(岡山大 22)　　(固有番号 m224002)

3.38 $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\,|\sin x|\,dx$ を求めよ.

(広島市立大 22)　　(固有番号 m224202)

3.39 $0\le x\le r$, $0\le y\le r$ 区間（r : 定数）で x 軸と y 軸, $x^2+y^2=r^2$ で囲まれる部分の面積 S が $\pi r^2/4$ であることを積分を用いて示しなさい.

(山口大 22)　　(固有番号 m224303)

3.40 変数変換 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ を利用して, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin\theta}\,d\theta$ を求めよ.

(徳島大 22)　　(固有番号 m224403)

3.41 (1) $x = \sin t\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおいて, 次の不定積分を求めよ. ただし, 最終的な答えは x の関数で表わすこと.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(2) $S(x) = \displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ とする. 次の値を求めよ.

(a) $S'(e)$　　(b) $S(e)$　　(c) $\displaystyle\int_1^e e^{S(x)}\log x\,dx$　　(d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{S(x)}}{x^x}\,dx$

(愛媛大 22)　　(固有番号 m224602)

3.42 図 1 に示すように座標平面の x 軸上に長さ 1 の棒がある. この棒の左端 P を y 軸に沿って原点 O から正方向に動かす. このとき棒の右端 Q は x 軸上を動くものとする（図 2）. 棒の左端 P から距離 t $(0 < t < 1)$ だけ離れた棒上の点を R とする.

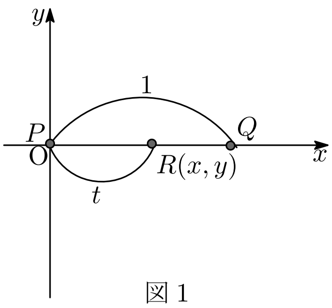


図 1

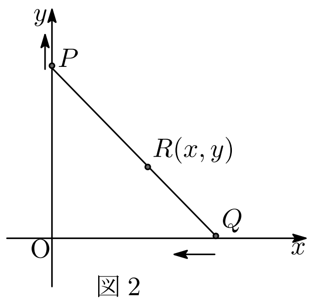


図 2

(1) 点 P が原点 O から点 $(0, 1)$ まで移動するとき, 点 R はどのような軌跡を描くか. 点 R の x 座標と y 座標が満たす式を求め, この軌跡の図形の名前を記せ.

(2) (1) で求めた軌跡と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

(3) (2) で求めた面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ.

(九州大 22)　　(固有番号 m224702)

3.43 $x \neq 0$ に対して,

$$f(x) = -\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$$

とおく. ただし, $\mathrm{Tan}^{-1}y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ は, $y = \tan x$ の逆関数である.

(1) $x \neq 0$ で

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

であることを示せ.

(2) 次の計算には誤りがある. 誤りの原因を指摘し, 正しい積分値を求めよ.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[f(x)\Big]_{-1}^{1} = f(1) - f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

(九州大 22)　　(固有番号 m224707)

3.44 a を正の定数とするとき, 以下の各問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) 任意の自然数 n に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax} = 0$$

(2) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax}\,dx$$

(3) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2}\,dx$$

(九州大 22)　　(固有番号 m224709)

3.45 $a = 4,\ 0,\ -4$ のそれぞれの場合に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分をを求めよ.

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx$$

(2) 次の広義積分について, 収束する場合には広義積分の値を求め, 発散する場合にはその理由を示せ.

$$\int_0^\infty \frac{1}{|x^2+a|}\,dx$$

(九州大 22)　　(固有番号 m224710)

3.46 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224903)

3.47 積分に関する, 以下の問いに答えよ. ただし, $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数とする.

(1) $\left(x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1} x\right)' = 2\sqrt{1-x^2}$ を示せ.

(2) $f(x) = x^2 \sin^{-1} x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\ \sin^{-1} x\,dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{1/2} x\ \sin^{-1} x\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224910)

3.48 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　　$(a>0)$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224914)

3.49 次の不定積分を求めよ. ただし積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int (x+4)\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$　　($t = \sin x$ と置いて考えよ)

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224920)

3.50 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (x+1/x)\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ (4) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(佐賀大 22) (固有番号 m224924)

3.51 次の曲線と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めなさい.

$$y=-x^2+3x$$

(佐賀大 22) (固有番号 m224926)

3.52 次の定積分を求めよ.

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x-9)^3}\,dx \qquad \int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$$

(長崎大 22) (固有番号 m225004)

3.53 次の関数 $y=x^3-3x^2+2x$ に関する以下の設問に答えよ.

(1) y のグラフを描きたい. x 軸との交点を求めよ.

(2) y のグラフの概形を図示せよ. (特に極大値と極小値を求めなくてよい)

(3) $(0 \leq x \leq 2)$ の区間の面積を求めよ.

(4) 上で概形を図示した y のグラフと, $y=ax$ との交点について考える. a の値により交わる点が変化する. a の値と交点の数との関係について説明せよ.

(長崎大 22) (固有番号 m225010)

3.54 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$ を求めよ.

(2) 次の 3 つの曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ.

$$y=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,, \qquad x \text{ 軸}\,, \qquad \text{直線 } x=2$$

(長崎大 22) (固有番号 m225013)

3.55 座標平面上を動く点 P の時刻 t における位置が

$$\begin{cases} x=e^{-t}\cos t \\ y=e^{-t}\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t < +\infty)$$

で与えられている.

(1) $t=\dfrac{\pi}{6}$ のときの点 P の位置を求めよ.

(2) $t=\dfrac{\pi}{3}$ のときの点 P の速度ベクトルを求めよ.

(3) $0 \leqq t \leqq 4\pi$ の間に点 P の進む距離を求めよ.

(大分大 22) (固有番号 m225101)

3.56 関数 $y=e^{-3x}$ において, 次の問いに答えなさい.

(1) この関数のグラフを描きなさい.

(2) グラフ曲線上の任意の点 A より x 軸に下ろした垂線の足を B とし, 点 A における接線と x 軸との交点を C とするとき, 線分 BC の長さを求めなさい.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-3x}\,dx$ を求めなさい.

(熊本大 22) (固有番号 m225203)

3.57 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+5x+6}dx$

(鹿児島大 22) (固有番号 m225402)

3.58 次の定積分を求めなさい.

$$\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$$

(鹿児島大 22) (固有番号 m225407)

3.59 曲線 : $y = x^2$ と, 曲線 : $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ とによって囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 22) (固有番号 m225410)

3.60 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx$ (3) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

(香川大 22) (固有番号 m225701)

3.61 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin 2x\, \sin 4x\, dx$ (2) $\displaystyle\int x^3 e^{2x}\, dx$

(首都大 22) (固有番号 m225907)

3.62 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\, y)$ と点 $(x+dx,\, y+dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a \leqq x \leqq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha \leqq t \leqq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 22) (固有番号 m226001)

3.63 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x-4}\, dx$ を求めよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ. ただし, a は正の定数である. $\displaystyle\int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\, dx$

(宇都宮大 22) (固有番号 m226106)

3.64 自然数 n に対して

$$I(n) = \int_1^e \frac{1}{x^n} \log x\, dx$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 部分積分法を用いて, $f(2)$ を求めよ.

(2) $\lim_{n\to\infty} I(n)$ を求めよ.

(はこだて未来大 22)　　(固有番号 m226304)

3.65 (1) 不定積分 $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\int_0^1 x^3 \log x\,dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 22)　　(固有番号 m226403)

3.66 (1) 不定積分 $\int \frac{dx}{x^4-1}$ を計算せよ.　　(2) 不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算せよ.

(東京工科大 22)　　(固有番号 m226905)

微分積分 II

4 級数

4.1 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し, 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(東北大 21)　　(固有番号 m210506)

4.2 以下の関数に対して, $x=0$ での 3 次までの Taylor 展開を求めなさい.

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(山梨大 22)　　(固有番号 m221807)

4.3 $0<x<\pi$ のとき

$$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

となることを示せ.

(金沢大 22)　　(固有番号 m222206)

4.4 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき, 数列 $\left\{\frac{a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{n}\right\}$ も a に収束することを示せ.

(富山大 22)　　(固有番号 m222308)

4.5 $\log(1+x)$ をマクローリン級数（マクローリン展開）を使って, 第 5 項まで示せ.

(福井大 22)　　(固有番号 m222403)

4.6 $f(x)=e^{\sin x}$ のマクローリン展開を $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき, 定数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ.

(静岡大 22)　　(固有番号 m222505)

4.7 関数 $f(x)=e^{\sin x}$ のマクローリン展開を次の指示に従って計算しなさい.

(1) $f'(x)$ と $f(x)$ との関係を導きなさい. その関係式に対してライプニッツの公式を適用し, $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(k)}(x)$ $(0\le k\le n)$ を用いて表しなさい. ただし, n は任意の自然数とし, 等式 $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ を用いてもよい.

(2)　$f(x)$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めなさい. ただし剰余項を求める必要はない.

(名古屋工業大 22)　　(固有番号 m222903)

4.8　無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+4}$ を求めよ。

(名古屋工業大 23)　　(固有番号 m232906)

4.9　半径 a の円に内接する正 n 辺形の面積を A_n, 外接する正 n 辺形の面積を B_n とおく. 半径 a の円の面積を C として, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C-A_n}{B_n-C}$ を求めよ. (3 角関数のテイラー展開は既知として使ってよい.)

(京都大 22)　　(固有番号 m223302)

4.10　自然数 n に対し, 以下のように定義される数列 $\{a_n\}$ について, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ を求めよ.

ただし, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ ($|r|<1$) を用いてもよい.

(1)　$\displaystyle a_n=\sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$　　　(2)　$\displaystyle a_n=\sum_{k=1}^{n+1}(k-2)\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(大阪大 22)　　(固有番号 m223502)

4.11　$f(x)=\cos(x)$ は x が十分小さい範囲で,

$$f(x)\approx\sum_{n=0}^{4}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{1}$$

と 4 次式近似できる. ただし $f^{(n)}(x)$ は n 次導関数とする. これについて, 以下の問に答えよ

(1)　$f(x),\ f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x)$ を計算し, 式 (1) 右辺の具体的関数形を書け.

(2)　関数 $g(x)$

$$g(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2} \tag{2}$$

について, (1) で求めた $\cos(x)$ の近似式を用いることで, $g(x)$ の近似式を求めよ.

(3)　(2) で得られた近似式より, $g(0.1)$ の近似値を計算せよ. 必要なら $1/24\approx 0.042$ を用いて良い.

(鳥取大 22)　　(固有番号 m223903)

4.12　(1)　$\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(2)　$\log(1-x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(3)　(1) と (2) を用いて, $\log\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(4)　a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{a}{\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ.

(広島大 23)　　(固有番号 m234105)

4.13　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する.

①　$a_1=1$

②　n が素数のときは $a_n=n$

③　$n\geq 2$ が素数でないときは $a_n=\dfrac{1}{m}$, ただし, m は n の 2 以上の約数の中で最小のものとする.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1)　初項から第 10 項までを求めよ.

(2)　$\dfrac{1}{2}$ に収束する部分列をひとつ求めよ.

(3) 0 に収束する部分列をひとつ求めよ.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないことを示せ.

(高知大 22)　　(固有番号 m224501)

4.14 初項 a, 公比 r の無限等比級数は, $|r| < 1$ のとき収束し, その収束値は $\dfrac{a}{1-r}$ で求められる. これを利用して循環小数 $0.2\dot{3}\dot{9}$ を分数で表せ.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224918)

4.15 $f(x) = \cos 3x$ を, マクローリン展開の公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

を用いて x の 2 次式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (a_0〜a_2は係数) で近似することを考える.

(1) 2 次式中の係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を求めよ.

(2) 近似式を利用して $\cos 0.6$ の近似値を計算せよ.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224919)

4.16 次の関数について, x^3 の項まで Maclaurin（マクローリン）の級数展開で表せ.

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

(長崎大 22)　　(固有番号 m225005)

4.17 (1) $\log(1+x)\quad(-1 < x < 1)$ の第 n 次導関数を求めよ.

(2) $\log(1+x)\quad(-1 < x < 1)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) $\log 2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2^n} + \cdots$ を示せ.

(島根大 22)　　(固有番号 m225802)

4.18 (1) $f(x) = \sin^{-1} x\quad(-1 < x < 1)$ とするとき, $f'(x),\ f''(x),\ f^{(3)}(x)$ を求めよ.

(2) 設問 (1) の結果を用いて $f(x)$ を x^3 の項まで $x = 0$ のまわりにおいてべき級数展開せよ.

(3) 設問 (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x}{x}$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x - x}{x^3}$ の値を求めよ.

(島根大 22)　　(固有番号 m225808)

4.19 $f(x) = \cos x$ について以下の問いに答えよ. ただし, $-\pi \leq x \leq \pi$ とする.

(1) マクローリン展開を用いて $f(x)$ を 2 次式で近似せよ.

(2) $f(x)$ および $f(x)$ を 2 次式で近似した曲線を図示せよ.

(首都大 22)　　(固有番号 m225906)

4.20 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次で与えられる.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

(1) 関数 $f(x) = (1+x)\sin x - x\cos x$ のマクローリン展開を書き下せ. ただし, x^4 の項までを明確に求め, それよりも高次の項は $\cdots$ と略してよい.

(2) (1) の結果を使って, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sin x - x\cos x}{x^2}$$

(滋賀県立大 22)　　(固有番号 m226002)

4.21 $f(x,y)=\log(1+x+y^2)$ のマクローリン展開を, 2 次の項まで求めなさい.

(和歌山大 22)　　(固有番号 m226508)

4.22 関数 $f(x)=\log(1+x)$ に対して, 3 次までのマクローリン展開を求めよ.

(東京工科大 22)　　(固有番号 m226904)

5 偏微分

5.1 2 変数関数 $f(x,y)=xy^2-x^2y+2$ について, $f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ の極値を求めなさい. ただし, 極小値か極大値か, そのときの x の値も書きなさい.

(東京農工大 21)　　(固有番号 m210903)

5.2 次の 2 変数関数の極値とそのときの点 (x,y) を求めなさい. ただし極値が極大値であるか極小値であるかを明記すること.

$$f(x,y)=x^3-x^2+2xy+x+y^2+1$$

(東京農工大 22)　　(固有番号 m220902)

5.3 関数 $f(r)$ から決まる 2 変数関数

$$u(x,y)=f(r)\,,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を $f'(r)$ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)$ が成り立つことを示せ.

(電気通信大 22)　　(固有番号 m221003)

5.4 $g(x,y)=x^2+2y^2-1=0\,,\quad x,y\geq 0$ の条件の下で関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めなさい.

(筑波大 21)　　(固有番号 m211303)

5.5 $f(x,y)=\sin^{-1}\dfrac{y}{x}$, $x>0$ のとき, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ を示しなさい.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221315)

5.6 長方形の閉領域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqq x\leqq\pi\,,\ 0\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}\}$ における次の関数 $f(x,y)$ の最大値, 最小値およびその時の x , y の値を求めなさい.

$$f(x,y)=\sin x\,\sin y\,\sin(x+y)$$

(筑波大 22)　　(固有番号 m221319)

5.7 $x>0$ に対して

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)$ を求めよ.

(2) $F'(x)$ を求めよ. ただし, 等式

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right\}dt$$

が成り立つことを用いてよい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x)$ を求めよ.

(埼玉大 22)　　(固有番号 m221403)

5.8 2 変数関数 $z = f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ について, 以下の各問に答えよ.

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(1, 2, 11)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) $a,\ b$ を定数とする. 極限 $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{f(1+at\,,\ 2+bt) - f(1, 2)}{t}$ を求めよ.

(3) 「$f(0, 0)$ は極大値である」, 「$f(0, 0)$ は極小値である」, 「$f(0, 0)$ は極値ではない」の 3 つの記述の中から正しいものを 1 つ選び, 理由を付けて答えよ.

(茨城大 22)　　(固有番号 m221701)

5.9 $f(x, y) = x^2 + xy$ とする. $x^2 + y^2 = 4$ を満たす (x, y) での $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めなさい.

(山梨大 22)　　(固有番号 m221805)

5.10 関数 $u(x, y, z) = \dfrac{yz}{x^2 + y^2}$ について, 次式を計算せよ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(新潟大 22)　　(固有番号 m222013)

5.11 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{e^x - e^y - x + y}{x^2 + y^2}\,, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ.

(2) $f_{xy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$ をそれぞれ求めよ.

(金沢大 22)　　(固有番号 m222207)

5.12 関数 $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$ に対して, $\left(\partial f/\partial x\right)^2 + \left(\partial f/\partial y\right)^2 + \left(\partial f/\partial z\right)^2$ を求めなさい. ただし, $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ とする.

(金沢大 22)　　(固有番号 m222211)

5.13 次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を計算せよ.

(1) $x^3y^5 + y^6 + 2x - 1 = 0$　　　(2) $xy = \sin(x + y)$

(福井大 22)　　(固有番号 m222402)

5.14 z が変数 $x,\ y$ の関数であり, x と y がともに t の関数ならば,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

となることを示せ.

(福井大 22)　　(固有番号 m222406)

5.15 $a \neq 0$ とするとき, 2 変数関数 $f(x, y) = xy(a - x - y)$ の極値を求めよ.

(静岡大 22)　　(固有番号 m222501)

5.16 次のパラメータ表示で与えられる xyz 空間内の曲線 C と直線 ℓ について, 以下の問いに答えよ. ただし, 空間内の二点 P, Q に対して, 二点間の距離を $\overline{PQ}$ で表す.

$$C \ : \ \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \cos\theta + \sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \qquad \ell \ : \ \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

(1) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}^2$ を θ と t の式で表せ.

(2) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}$ の最小値, および, そのときの P と Q の座標を求めよ.

(岐阜大 22)　　(固有番号 m222604)

5.17 $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - 6x$ とする.

(1) 方程式 $f(x, y) = 0$ の表す平面曲線はどのような図形か答えよ.

(2) 2 変数関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 23)　　(固有番号 m232903)

5.18 次の関数を x と y についてそれぞれ偏微分しなさい. ただし, $x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1$ とする.

$$f(x, y) = \log_y x$$

(三重大 22)　　(固有番号 m223106)

5.19 xy 平面上で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{y}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

がある． ここで, $\mathrm{Tan}^{-1} x$ は逆正接関数の主値を表す.

(1) $x \neq 0$ のとき, 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ を定義に基づいて求めよ.

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 22)　　(固有番号 m223403)

5.20 $(x + y)^{xy}$ の x についての偏微分を計算しなさい $(x,\ y > 0)$. ただし, $x^a = e^{a \log x}$ と定義する.

(神戸大 22)　　(固有番号 m223803)

5.21 x, y 実数とし,

$$f(x, y) = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f_x(x, y),\ f_y(x, y)$ を求めよ.

(2) 曲線 $z = f(x, y)$ の, 点 $(1, 1, \pi/4)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

(3) $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ を求めよ.

(神戸大 22)　　(固有番号 m223804)

5.22 2 次元において直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) には,

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta$$

の関係式がある $(r > 0,\ 0 < \theta \leq 2\pi)$; これについて, 以下の問に答えよ.

(1) r を x, y のみの関数として表せ. また, θ を x, y のみの関数として表せ.

(2) 以下の偏微分をそれぞれ計算せよ.

(2a) $\dfrac{\partial x}{\partial r}$　　(2b) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$　　(2c) $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$

(鳥取大 22)　　(固有番号 m223902)

5.23 (1) 関数 e^x , $\sin x$, $\log(1+x)$ をそれぞれ $x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めよ.

(広島大 22)　　(固有番号 m224101)

5.24 関数 $u(x, y) = e^{-cx-y}$ (c は定数) に対して, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(広島大 23)　　(固有番号 m234102)

5.25 関数 $z = e^x(\cos x + \sin y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(広島市立大 22)　　(固有番号 m224201)

5.26 関数 $z = f(x, y)$ は偏微分可能であるとする. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標変換するとき, 次の 2 つの式が成立することを示せ.

(a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = r\cos 2\theta\dfrac{\partial z}{\partial r} - \sin 2\theta\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$　　(b) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(愛媛大 22)　　(固有番号 m224603)

5.27 次のそれぞれの関数 $f(x, y)$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, log は自然対数とする.

(1) $f(x, y) = \log(1 - xy)$　　(2) $f(x, y) = x^3 + 6xy + y^3$

(a) $f_x,\ f_y,\ f_{xx},\ f_{yy}$ および f_{xy} を求めよ.

(b) $f_x = f_y = 0$ を満たす (x, y) を求めよ.

(c) (b) で求めた (x, y) について, $f(x, y)$ が極大値か, 極小値か, あるいは極値でないか判定せよ.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224909)

5.28 次の関数の $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(1) $y = \tan(2x - 3)$　　(2) $x^3y^3 + y - x = 0$

(長崎大 22)　　(固有番号 m225003)

5.29 関数 $u(x, y) = e^x\cos y$ がある. 以下の設問に答えよ.

(1) 次の偏微分を求めよ.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$

(2) 次の式を計算せよ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(長崎大 22)　　(固有番号 m225009)

5.30 $z = f(xy)$ のとき, $xz_x - yz_y$ を計算せよ. ただし, z_x は z の x 偏微分, z_y は z の y 偏微分である.

(長崎大 22)　　(固有番号 m225012)

5.31 x と y の 2 変数関数

$$f(x, y) = \alpha x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 4y$$

について, 次の問に答えよ. ただし, α は定数で $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ とする.

(1) 関数 $f(x, y)$ の 2 階までの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

をすべて求めよ.

(2) 関数 $f(x, y)$ が極値を持つための α の条件を示し, その場合の極値と, その極値が極大値あるいは極小値のどちらであるか答えよ.

(宮崎大 22)　　(固有番号 m225303)

5.32 (1) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$ は原点 $(0, 0)$ で偏微分可能かどうか調べよ.

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能かどうか調べよ.

(3) 関数 $f(x, y) = xy(x - y + 1)$ の極値を求めよ.

(島根大 22)　　(固有番号 m225803)

5.33 次の 2 変数関数 $z = z(x, y)$ の極値を求めよ. ただし, x の定義域は $x > 0$ とする.

$$z = z(x, y) = -\frac{1}{2}xy - \log x + y^2 + 3y + 2$$

(宇都宮大 22)　　(固有番号 m226104)

5.34 $f(x, y) = 2x^3 + 24xy^2 - 3x^2 + 48xy + 12y^2 + 24x + 24y$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 22)　　(固有番号 m226404)

5.35 曲面 $z = e^{x-y-1}$ の $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ における接平面の方程式を求めなさい.

(和歌山大 22)　　(固有番号 m226507)

5.36 関数 $f(x, y) = x^3 - xy^2$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよ.

(東京工科大 22)　　(固有番号 m226903)

6　重積分

6.1　重積分

$$I=\iint_D y\,dxdy$$

について次の問いに答えなさい. ただし, xy 平面上の領域 D は

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$$

の共通部分である.

(1)　領域 D を図示しなさい.

(2)　重積分 I を求めなさい.

(3)　$x,\ y$ を極座標に変換して重積分 I を求めなさい.

(岩手大 22)　　(固有番号 m220304)

6.2　点 O を原点とする xyz 空間に, 点 P および x 軸上の点 Q があり, この 2 つの点が $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{PQ}|=1/2$ を満たしながら動くとき, 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域を V とする. 以下の問いに答えよ.

(1)　点 P の集合を表す曲面の方程式を x,y,z で表せ.

(2)　点 P が xy 平面上の第 1 象限 $(x>0\,,\ y>0)$ に存在し, かつ点 Q が点 O 以外に存在する場合を考える.

(a)　このとき, $\angle POQ=\theta$ として, 線分 $\overline{PQ}$ を表す方程式を x,y,θ で表せ.

(b)　線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域 S を表す式を求め, 領域 S の概形を図示せよ.

(3)　領域 V の体積を求めよ.

(東京大 22)　　(固有番号 m220703)

6.3　次の二重積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2-y^2+2xy}}{1+(x+y)^2}\,dxdy$$

(東京工業大 22)　　(固有番号 m220802)

6.4　領域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq 1\,,\ x \geqq 0\,,\ y \geqq 0\}$ における次の二重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-x^3\right)dxdy$$

(東京農工大 22)　　(固有番号 m220903)

6.5　次のそれぞれの重積分の値を求めよ.

(1)　$\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy\,,$　ただし, $D=\{(x,y)\ :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ y \geq 0\}$

(2)　$\displaystyle\iint_D (x+3y)^2\,e^{x-y}\,dxdy\,,$　ただし, $D=\{(x,y)\ :\ |x+3y| \leq 1\,,\ |x-y| \leq 1\}$

(電気通信大 22)　　(固有番号 m221004)

6.6　三次元空間 O-xyz 座標系で, 曲面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=2ax$ で囲まれた図形の体積を求めなさい. ただし, a は定数 $(a>0)$ である.

(千葉大 22)　　(固有番号 m221203)

6.7 $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y \geq 0\}$ と定めるとき, 積分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

を求めよ.

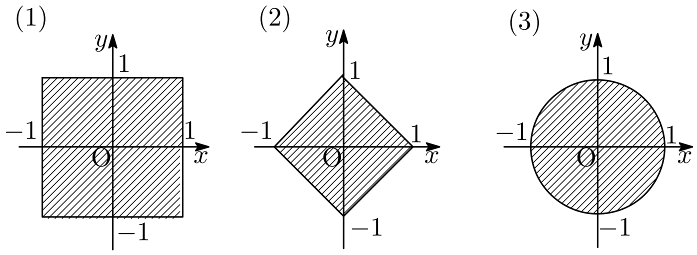
(筑波大 22)　　(固有番号 m221304)

6.8 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy$ の値を, 積分範囲 D が次の 3 つの場合について, それぞれ計算せよ（図を参照）.

(1) $(1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (1,-1)$ を頂点とする正方形の内部

(2) $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$ を頂点とする正方形の内部

(3) 原点を中心とする単位円の内部



(筑波大 22)　　(固有番号 m221306)

6.9 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を求めなさい.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221314)

6.10 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された次の二重積分 I_n を求めなさい.

$$I_n = \iint_K xy^n\,dxdy\,, \quad K = \{(x,y)\,|\,y \geqq x^2\,,\ x \geqq y^2\}$$

(筑波大 22)　　(固有番号 m221320)

6.11 座標平面内の領域 $D = \{(x,y)\,|\,x,\,y$ は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ.

(1) $x = 0.01,\ y = 0.02$ のとき, $f(x,y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする.

3 つの座標平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ.

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x,y)\,dxdy$$

の値を, $n = 1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ.

(茨城大 22)　　(固有番号 m221705)

6.12 次の二重積分の値を求めよ. ただし, $D_1 : x+y \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0$ とする.

$$\iint_{D_1} \sqrt{x+y}\,dxdy$$

(新潟大 22)　　(固有番号 m222014)

6.13 xy 平面上において, $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とし, $-x \leqq y \leqq -x+1,\ x \leqq y \leqq x+1$ で表される領域を E とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) E の概形を描き, その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_E (x+y)^2\,dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 22)　　(固有番号 m222103)

6.14 (1) $x = u\cosh v\,,\ y = u\sinh v$ とおく.

$$1 \leqq u \leqq 2\,,\ -\infty < v < \infty \text{ のとき } x \geqq 1\,,\ 1 \leqq x^2 - y^2 \leqq 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v = \dfrac{e^v + e^{-v}}{2}\,,\ \sinh v = \dfrac{e^v - e^{-v}}{2}$ である.

(2) 変数変換 $x = u\cosh v\,,\ y = u\sinh v$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{\log(x^2-y^2)}{x}\,dxdy$$

を計算せよ. ただし $D = \left\{(x,y)\,|\,x \geqq 1\,,\ 1 \leqq x^2 - y^2 \leqq 4\right\}$ とする.

(金沢大 22)　　(固有番号 m222203)

6.15 次の広義積分を計算せよ.

(1) $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\,|\,x, y \geqq 0\right\}$ とするとき

$$\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy\ .$$

(2) $E = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\,|\,x, y \geqq 0\,,\ x+y \leqq 1\,,\ (x,y) \neq (0,0)\right\}$ とするとき

$$\iint_E \log(x+y)\,dxdy\ .$$

(金沢大 22)　　(固有番号 m222208)

6.16 (1) 直交座標の二重積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を変数変換

$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta$

によって, 極座標 $(r,\ \theta)$ の二重積分に変換せよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(富山大 22)　　(固有番号 m222305)

6.17 $A = \left\{\,(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3\ \middle|\ 0 \leqq z \leqq 1 - x^2 - y^2\right\}$ とするとき, 次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_A 2z(2x^2 - y^2)\,dxdydz$$

(富山大 22)　　(固有番号 m222310)

6.18 次の量を 3 重積分を使って表し, その値を求めよ.

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x/a + y/b + z/c = 1$ で囲まれる体積.

(福井大 22)　　(固有番号 m222407)

6.19 次の 2 重積分を求めよ. また, 積分領域 D を図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+1}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ x-1\leqq y\leqq 1-x\ ,\ 0\leqq x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ :\ 1\leqq x^2+y^2\leqq e^2\right\}$

(静岡大 22)　　(固有番号 m222502)

6.20 (1) 次の累次積分 I を計算しなさい.

$$I=\int_0^2\left\{\int_0^{\sqrt{3(x^2+5)}}\frac{1}{x^2+y^2+5}\,dy\right\}dx$$

(2) 次の 2 重積分 J を指示に従って計算しなさい.

$$J=\iint_D e^{-(x^2-2xy+4y^2)}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

(a) 変数変換 $s=x-y\ ,\ t=\sqrt{3}y$ により D が st 平面内の集合 K に移されるとき, J を (s,t) 変数の 2 重積分として表しなさい. ただし K を具体的に表示する必要はない.

(b) (a) の集合 K を求めなさい.

(c) さらに st 平面における極座標変換を行って J の値を計算しなさい.

(名古屋工業大 22)　　(固有番号 m222904)

6.21 次の積分の値を求めよ.

$$I_2=\iint_D\frac{1}{x^2+y^2+2}\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\ ,\ \ x+y\geqq 0\right\}$$

(名古屋工業大 23)　　(固有番号 m232905)

6.22 (1) $\displaystyle I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)\,dx$ としたとき, I^2 を極座標を用いて計算し $\displaystyle I=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ となることを示せ.

ただし, $a>0$ とする. 次に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp(-x^2)\,dx$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle f(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}\,dt$ とするとき, n を 0 または正の整数として

(i) $f(n+1)=n!$,　　(ii) $f(n+\frac{1}{2})=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$　　となることを示せ.

(三重大 22)　　(固有番号 m223112)

6.23 次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$$

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$$

(2) 変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ.

$$I^2=\iint_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

(3) この 2 次元積分は直交座標 (x,y) から極座標 (r,θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I=\sqrt{\pi}$ であることを示せ.

ただし, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ であり, $dxdy=rdrd\theta$ である.

(奈良女子大 22)　　(固有番号 m223204)

6.24 xy 平面の領域

$$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\,,\ 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$$

に対して，重積分 $\displaystyle\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 22)　　(固有番号 m223404)

6.25 累次積分

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 y^2 e^{x^4} dx\right) dy$$

の計算を実行しよう. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) I を二重積分とみたとき, 積分する領域（ただし, 境界を含む）を xy 平面上に図示せよ.

(2) 積分順序を交換することにより, I の値を求めよ.

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223601)

6.26 n を 0 以上の整数とし,

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+y^2)^{n/2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ. ただし. 任意の自然数 ℓ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^\ell e^{-t^2} = 0$ となることは証明なしに用いてもよい.

(1) 極座標への変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を用いて, J_n を r に関する積分のみで表示せよ.

(2) J_0 の値を求めよ.

(3) n を 2 以上の自然数とするとき, J_n と J_{n-2} の関係式を求め, さらに J_{10} の値を求めよ.

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223602)

6.27 $D = \left\{(x.y) \;\middle|\; y \leq 3x\,,\ y \leq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}\,,\ y \geq \dfrac{1}{2}x\,,\ y \geq 3x - 10\right\}$

とするとき, D を図示し, 積分 $\displaystyle\iint_D (x-2y)\,dxdy$ を計算せよ.

(神戸大 22)　　(固有番号 m223808)

6.28 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ.

(3) 積分 $\displaystyle I(c) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2cx\,dx$ について, $\dfrac{dI(c)}{dc}$ を $c,\ I(c)$ を用いて表せ.

(4) 積分 $I(c)$ を求めよ.

(広島大 22)　　(固有番号 m224102)

6.29 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y}\,dxdy$ を求めよ.

(広島大 23)　　(固有番号 m234103)

6.30 変数変換 $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$ を用いて, 2 重積分

$$S = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy\,,\quad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\right\}$$

の値を求めよ.

(広島市立大 22)　　(固有番号 m224203)

6.31 $0<a<1,\ D_a=\left\{(x,y)\,;\ a^2 \leqq x^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする.

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とする. 行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を $r,\ \theta$ で表せ.

(2) $I(a)=\displaystyle\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} I(a)$ を求めよ.

(徳島大 22)　　(固有番号 m224404)

6.32 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定義する.

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\le 2x\,,\ x\le 2y\,,\ x+y\le 3\}$$

D における重積分

$$\iint_D x\,dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 累次積分を用いて①の値を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 Φ を

$$u=\varphi(x,y)=\frac{2x-y}{3}\,, \qquad v=\psi(x,y)=\frac{-x+2y}{3}$$

としたときに $\Phi(x,y)=(\varphi(x,y),\ \psi(x,y))$ で定義する. xy 平面上の集合 D を変換 Φ によりうつした uv 平面上の像 D' を図示せよ.

(3) (2) の変換 Φ を用いて①を

$$\iint_{D'} f(u,v)\,dudv$$

と表したときの f を求めよ.

(4) (3) の重積分の値を求めよ.

(高知大 22)　　(固有番号 m224502)

6.33 次の累次積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right) dy$

(愛媛大 22)　　(固有番号 m224604)

6.34 3 次元空間内で

$V=\{(x,y,z)\,;\ x=t\cos\theta\,,\ y=t\sin\theta\,,\ z=r\,,\ 0\le t\le r\,,\ 0\le r\le 3\,,\ 0\le\theta<2\pi\}$

で表される集合 V を考える.

(1) V の体積を求めよ.

(2) L を平面

$$z=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{4}y+1$$

とし, $S=V\cap L$ とおく.

$$\min\{z\,;\ (x,y,z)\in S\} \qquad \max\{z\,;\ (x,y,z)\in S\}$$

を求めよ.

(九州大 22)　　(固有番号 m224705)

6.35　次の積分を求めよ.

$$\iint_D x\,dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leq 4,\ x+y \geq 2)$$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224904)

6.36　2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{3x+2y}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1\,,\ 0\leq y\leq 1\}$ を求めよ.

(長崎大 22)　　(固有番号 m225014)

6.37　xy 平面上で $x=2,\ y=1,\ y=x^2$ によって囲まれた領域を D とするとき, 次の各問に答えよ.

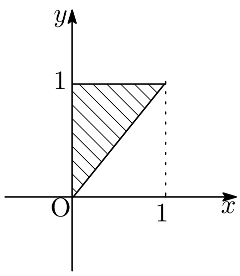
(1)　領域 D を xy 座標平面上に図示せよ.

(2)　重積分 $I=\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$ の値を求めよ.

(宮崎大 22)　　(固有番号 m225304)

6.38　(1)　$\displaystyle\int_a^1 xe^{-x^2}\,dx$ を計算せよ.

(2)　図 1 の斜線部で示すような, xy 平面上の領域を D とする. 領域 D における積分 $\displaystyle\iint_D e^{-y^2}\,dxdy$ を計算せよ.



(3)　$\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy\right\} dx$ を計算せよ.

(島根大 22)　　(固有番号 m225813)

6.39　累次積分 $I=\displaystyle\int_0^a \left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}\,dy\right\} dx$ の値を計算したい.

(1)　$I=\displaystyle\int\int_D \sqrt{a^2-y^2}\,dx\,dy$ となるような D を不等式で表し図示せよ.

(2)　積分の順序を交換して累次積分 I の値を求めよ.

(滋賀県立大 22)　　(固有番号 m226004)

6.40　次の重積分の値を求めよ.

(1)　$\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2 \leqq y \leqq \sqrt{x}\}$

(2)　$\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2+1}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq 1\,,\ x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\}$

(東京海洋大 22)　　(固有番号 m226405)

6.41　次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D \sin(x+y)\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\mid 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$$

(和歌山大 22)　　(固有番号 m226509)

7　微分方程式

7.1　以下の微分方程式の一般解を計算せよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1)　$y' - 3y = e^x$

(2)　$y'' + 2y' + y = 0$

(北海道大 22)　　(固有番号 m220101)

7.2　2 階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \sin \Omega t$$

について, 次の問いに答えなさい. ただし, 初期条件

$$t = 0 \text{ のとき, } x = \frac{dx}{dt} = 0$$

とする. また, ω と Ω は正の定数とする.

(1)　$\omega \neq \Omega$ のとき, 微分方程式の解を求めなさい.

(2)　$\omega = \Omega$ のとき, 微分方程式の解を求めなさい.

(岩手大 22)　　(固有番号 m220303)

7.3　(1)　微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2 x \qquad ③$$

の一般解を求めよ. ここで a は正の定数である.

(2)　③の一般解に対して $at \ll 1$ の場合を考えると, これが $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ の一般解に一致することを示せ.

(3)　③の微分方程式を $t = 0$ で $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ という初期条件の下で解き, その解が $t \to \infty$ で有限な値を持つための条件を求めよ.

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220607)

7.4　以下の問いに答えよ. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1)　次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 2y' - 3y = x + \cos x$$

(2)　微分方程式

$$2yy'' - 3(y')^2 = y^2 \qquad y(0) = 1, \ y'(0) = 1 \qquad (*)$$

を考える. ただし, $y > 1/2$, $y' > 0$ とする.

(a) $p = y'$ とおいて, 式 $(*)$ を p と y の 1 階微分方程式

$$f(y,p)\frac{dp}{dy} - 3p^2 = y^2 \qquad (**)$$

の形に変形する. このとき $f(y,p)$ を求めよ.

(b) 式 $(**)$ を解いて, p を y の式で表せ.

(c) 式 $(*)$ を解いて, y を x の式で表せ.

(東京大 22)　　(固有番号 m220702)

7.5　x の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 4x$$

の解のうち, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$ を満たすものを求めなさい.

(東京農工大 22)　　(固有番号 m220904)

7.6 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^5 - 6x^4 y}{3xy^4 - 3x^5}$ (2) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = -2x$

(横浜国立大 22) (固有番号 m221102)

7.7 次の線形連立微分方程式を解き, その一般解 $x(t)$, $y(t)$ を求めなさい.

$$\frac{dx}{dt} - 3x + y = 0$$

$$x - \frac{dy}{dt} + y = 0$$

(千葉大 22) (固有番号 m221204)

7.8 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$ の一般解を求め, それが xy 平面上でどのような曲線群になるか調べよ. さらに, 代表的な場合（一通りとは限らない）について, そのグラフを xy 平面上に図示せよ.

(筑波大 22) (固有番号 m221307)

7.9 (1) 次の微分方程式を $y = \dfrac{1}{N}$ と置いて変数変換せよ. ただし, α, β は正の定数, $N = N(t)$ とする.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$$

(2) 定数変化法により (1) で得られた式を解き, $N(t)$ を求めよ. ただし, $N(0) = N_0$ とする.

(筑波大 22) (固有番号 m221311)

7.10 (1) 以下の微分方程式を解け.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \cdot \tan y$

(b) $\cos x \dfrac{dy}{dx} - y \sin x = 2\cos x \, \sin x$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = e^x$

(2) $y(t)$ が時刻 t における物体の位置を表すとすると, $f'(t)$ は速度, $f''(t)$ は加速度を表す.

(a) 下記の運動方程式を満たすこの物体の位置 $y(t)$ を求めよ.
$y''(t) + k^2 y(t) = 0$ ($k > 0$ の定数)

(b) 初期条件 $y(0) = A_0$, $y'(0) = 0$ を満たす解を求めよ.

(埼玉大 22) (固有番号 m221408)

7.11 初期条件 $x = 1$, $y = 1$ のもとで, 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} = y(1 + y)$ の解を求めよ.

(茨城大 22) (固有番号 m221703)

7.12 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

(山梨大 22) (固有番号 m221808)

7.13 次の微分方程式を解け.

(1) $(2x - 2y - 1)\,dx + (-2x + 6y + 3)\,dy = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = -2\cos 2x$

(新潟大 22) (固有番号 m222009)

7.14 (1) 微分方程式 $y' = -\dfrac{x}{y}$ の一般解を求めなさい.

(2) 前問で求めた一般解を表す全ての曲線と直交する曲線を求めなさい.

(長岡技科大 22)　　(固有番号 m222104)

7.15 次の微分方程式 4 問中から 3 問を選択し, それぞれの一般解を求めよ.

ただし, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ である.

(1) $y^2 + 1 - 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$　　(2) $x^2 + y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

(3) $(\cosh x)\dfrac{dy}{dx} + (y - x)\sinh x = 0$　　(4) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

(富山大 22)　　(固有番号 m222306)

7.16 次の微分方程式の一般解を導出して, 初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x$　($x = 1$ のとき, $y = 0$)

(2) $x\dfrac{dy}{dx} + x + y = 0$　($x = 1$ のとき, $y = 0$)

(3) $\dfrac{dy}{dx} = (x + y)^2$　($x = 1$ のとき, $y = -1$)

(福井大 22)　　(固有番号 m222410)

7.17 次の微分方程式を解け.

(1) $xy\dfrac{dy}{dx} = y - 1$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$　　(3) $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

(福井大 22)　　(固有番号 m222420)

7.18 次の微分方程式の初期値問題の解 $y = y(x)$ を求めよ.

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + y - y^2 = 0 \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(静岡大 22)　　(固有番号 m222507)

7.19 次の各微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy(1 - y)$　　(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$

(静岡大 22)　　(固有番号 m222508)

7.20 次の全微分方程式 ① について以下の問に答えよ.

$$(y + 2xy)dx + xdy = 0 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

(1) e^{2x} が全微分方程式 ① の積分因子となることを示せ.

(2) 全微分方程式 ① の一般解を求めよ.

(静岡大 22)　　(固有番号 m222509)

7.21 次の 2 階の微分方程式 ② について以下の問に答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

(1) 微分方程式 ② の一般解を求めよ.

(2) $y' + y = u \cdots$ ③ とおくとき, u は次の微分方程式 ④ をみたすことを示せ.

$$\frac{du}{dx} + 3u = 0 \quad \cdots\cdots \quad ④$$

(3) 微分方程式 ④ の一般解を求めよ.

(4) 微分方程式 ③ を (2) で求めた u を非同次項とする y についての 1 階線形微分方程式とみなすことにより, 微分方程式 ③ の一般解を求めよ.

(静岡大 22)　　(固有番号 m222510)

7.22 $y(x)$ を未知関数とする, 次の常微分方程式 (A) について, 以下の問いに答えよ.

$$y'(x) - \tan(x)\, y(x) = 2e^{2\sin(x)} \ , \qquad -\pi/2 < x < \pi/2 \qquad (A)$$

(1) $y(x; y_0)$ を初期条件 $y(0) = y_0$ を満たす微分方程式 (A) の解とするとき, $y(x; y_0)$ を求めよ. ただし, y_0 は実数とする.

(2) (1) の解 $y(x; y_0)$ について, 極限 $\displaystyle\lim_{x \to -\pi/2} y(x; y_0)$ が有限な値となるような初期値 y_0 はあるか. もしもあるなら, そのときの初期値 y_0 と $\displaystyle\lim_{x \to -\pi/2} y(x; y_0)$ を求めよ. また, もしもないのであれば, その理由を述べよ.

(岐阜大 22)　　(固有番号 m222605)

7.23 境界条件「$x = 0$ のとき, $y = 1$」のもとで, 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y$$

の整級数の解 $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$ を求めよ.

(名古屋工業大 22)　　(固有番号 m222908)

7.24 定数係数の 2 階線形微分方程式

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x \ , \quad (\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0 \ \ \text{定数})$$

が一つの特殊解 $y = e^{2x} + (1 + x)e^x$ を持つとする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 係数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を決めよ.

(2) 微分方程式の一般解を求めよ.

(名古屋工業大 23)　　(固有番号 m232909)

7.25 (1) 次の微分方程式が完全 微分方程式であることを示しなさい.

$$(3x^2 y - y^3)\, dx = (3y^2 x - x^3)\, dy$$

(2) 完全微分方程式 $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ の一般解が

$$\int P(x, y)\, dx + \int \left\{ Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)\, dx \right\} dy = c \qquad \text{ただし } c \text{ は任意定数}$$

で与えられることを利用して,

$$(3x^2 y - y^3)\, dx = (3y^2 x - x^3)\, dy$$

の一般解を求めなさい.

(三重大 22)　　(固有番号 m223101)

7.26 次の微分方程式の一般解を求めなさい. ただし, $x \neq 1$ とする.

$$(x-1)\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0$$

(三重大 22)　　(固有番号 m223107)

7.27 次の微分方程式について以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

(1) 次の $x(t)$ はこの微分方程式の解であることを示せ.

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

ここで, $C_1,\ C_2$ は定数である.

(2) この $x(t)$ は次のように表すこともできる.

$$x(t) = B_1 e^{+i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}$$

このとき, $B_1,\ B_2$ と $C_1,\ C_2$ の関係を求めよ.

(奈良女子大 22)　　(固有番号 m223205)

7.28 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 4y = \cos\omega t$ の特殊解を $y = P\cos\omega t + Q\sin\omega t$ と表すとき, 係数 P と Q 求めよ. ただし, ω は実数で $\omega > 0$ である.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223503)

7.29 $x = x(t)$ に関する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -2x^2 + t^{-2}\ . \quad t > 0$$

を考える.

(1) $v(t) = \{x(t) - t^{-1}\}^{-1}$ とおき $v(t)$ に関する微分方程式を作れ. ただし, $\dfrac{dv}{dt}$ を t と v で表せ.

(2) (1) で求めた微分方程式は非斉次微分方程式であるが, その定数項を無視した斉次微分方程式の解 $\bar{v}(t)$ を求めよ.

(3) $C(t)\bar{v}(t)$ が (1) で導いた微分方程式を満たすように $C(t)$ を定めよ.

(4) $x(t)$ を求めよ.

(5) $x(1) = 1$ となる解を求めよ.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223505)

7.30 実数値関数 $x = x(t),\ y = y(t)$ は次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -2xy \\ \dfrac{dy}{dt} &= x^2 - y^2 \end{cases}$$

に解で, $t = 0$ において $(x(0),\ y(0)) = (a,\ b)$ である. ただし, $a \neq 0$ とする.

(1) 解 $(x(t),\ y(t))$ に対してある定数 C があり, つねに $x^2 + y^2 = Cx$ が成り立つことを示せ.

(2) t が実数全体を動くとき $|x(t)|$ の最大値があることを示し, それを $a,\ b$ で表せ.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223508)

7.31 次の定係数 2 階線形常微分方程式の一般解を求めよ.

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0$$

ただし, $a>0,\ c>0$ とする.

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223607)

7.32 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx}=4x^3y$$

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223612)

7.33 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}-y=-y^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $z=y^{-1}$ とおいて, z を満たす微分方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた微分方程式の一般解を求めよ.

(3) 初期条件「$x=0\,,\ y=1/2$」のもとで, 微分方程式 $(*)$ を解け.

(神戸大 22)　　(固有番号 m223805)

7.34 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+2$$

(山口大 22)　　(固有番号 m224301)

7.35 (1) $y'+xy=0$ の一般解を求めよ.

(2) $y'+xy=x$ の一般解を求めよ.

(3) $y'+xy=x$ の両辺を x で微分した式を求めよ.

(4) $y''+xy'+y=1$ の解のうち, 初期条件 $y(0)=2,\ y'(0)=0$ を満たすものを求めよ.

(徳島大 22)　　(固有番号 m224405)

7.36 以下の (1)〜(3) の問いに答えよ. ただし, $D=\dfrac{d}{dx}$ を表している.

(1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$(D-1)y=x$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の境界値問題を解け.

$$\left(D^2-6D+13\right)y=0 \qquad y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

(3) 次の関数 $f(x),\ g(x)$ に関する連立微分方程式

$$(D-2)\,f+g=0$$

$$-4f+(D+3)\,g=0$$

を条件 $f(0)=3,\ g(0)=6$ のもとで解け.

(九州大 22)　　(固有番号 m224701)

7.37 次の微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0$$

を条件

$$m>0,\ r>0,\ k>0,\ r^2-4mk>0$$

および初期条件 $(t=0)$

$$x=0\ , \qquad \frac{dx}{dt}=1$$

のもとで解け.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224915)

7.38 つぎの微分方程式を解け. ここで, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $y'+3y=0$

(2) $y'+3y=\sin x$

(長崎大 22)　　(固有番号 m225015)

7.39 (1) 次の微分方程式の一般解 $y=y(x)$ を求めよ.

$$\frac{dy}{dx}+y=x$$

(2) 次の微分方程式を, $y(0)=\dfrac{dy}{dx}(0)=0$ という条件のもとで解け.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=x$$

(宮崎大 22)　　(固有番号 m225305)

7.40 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $2xydx+xydy+ydx+2xdy=0$

(2) $(2xy^2+\sin x)dx+(2x^2y+\cos y)dy=0$

(3) $y''+y'-2y=e^{-2x}+3e^{2x}$

(鹿児島大 22)　　(固有番号 m225403)

7.41 次の微分方程式を解け.

$$x\frac{dy}{dx}+(y+5)=0$$

(首都大 22)　　(固有番号 m225905)

7.42 次の連立微分方程式の解を求めよ. ただし, $t=0$ のとき $x=2$, $y=0$ とする.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-3y-2x \end{cases}$$

(宇都宮大 22)　　(固有番号 m226103)

7.43 次の微分方程式の一般解を求め, さらに, 与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい.

(1) $y\dfrac{dy}{dx}=x^3\ ,\quad y(1)=1$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\cos 3x\ ,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$,　$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(和歌山大 22)　　(固有番号 m226503)

線形代数

8　ベクトル

8.1　xyz 空間の点 $P(0,0,t)$ を通り, ベクトル $\vec{a} = (2,2,1)$ に垂直な平面 α と方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z = 11$$

で表される球 S について, 次の問いに答えなさい. ただし, $t > 0$ とする.

(1) 平面 α の方程式を t を用いて表しなさい.

(2) 球 S の中心の座標と半径を求めなさい.

(3) 球 S の中心から平面 α までの距離を, t を用いて表しなさい.

(4) 球 S と平面 α が交わってできる図形は円になる. この円の面積を 9π とするとき, t の値を求めなさい.

(岩手大 22)　　(固有番号 m220301)

8.2　次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ に関する以下の問いに答えなさい.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立であることを示しなさい.

(2) 以下の手順に従って, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ から, 互いに直交する大きさ 1 の 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を求めなさい.

(a) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}$ を求める.

(b) $\boldsymbol{a}_2$ の $\boldsymbol{u}_1$ に直交する成分 $\boldsymbol{b}_2$ を求め, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}_2}{||\boldsymbol{b}_2||}$ を求める.

(c) $\boldsymbol{a}_3$ の $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ に直交する成分 $\boldsymbol{b}_3$ を求め, $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{\boldsymbol{b}_3}{||\boldsymbol{b}_3||}$ を求める.

(千葉大 22)　　(固有番号 m221202)

8.3　3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ における平面 $W_1 : x + y + z = 0$ および $W_2 : x + y - z = 0$ について以下の設問に答えよ.

(1) W_1 , W_2 に垂直な直線を l_1 , l_2 とする. これらの直線が原点を通るとき, l_1 , l_2 を表す方程式を求めよ.

(2) l_1 , l_2 の両者と直交する直線 l_3 を表す方程式を求めよ.

(3) W_1 と W_2 の交線を表す方程式を求めよ.
また, この交線と前問で求めた直線 l_3 のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする$)$ を求めよ.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221310)

8.4 n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1\,,\ \boldsymbol{v}_2\,,\ \cdots\,,\ \boldsymbol{v}_n$ が線形独立とは,

$$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

が成り立つのが, 係数 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ の場合に限られることをいう. この定義に従って, 実数 a, b, c, d, e, f を要素とするベクトルについて, 以下に設問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が線形独立である必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ は線形独立とならないことを示せ.

(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ が, 線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221321)

8.5 座標空間上に 4 点 $A = (1, 0, -1)\,,\ B = (4, 2, -1)\,,\ C = (-1, 3, 0)\,,\ D = (2, 1, 3)$ がある. このとき, 有向線分 $\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AC}\,,\ \overrightarrow{AD}$ から定まる平行六面体の体積 V を求めよ.

(福井大 22)　　(固有番号 m222418)

8.6 原点を通り, 直線 $\ell_1\ :\ \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+5}{1}$ と直交する直線を ℓ_2 とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 直線 ℓ_2 の方程式を求めよ.

(2) 2 直線 $\ell_1\,,\ \ell_2$ を含む平面の方程式を求めよ.

(静岡大 22)　　(固有番号 m222503)

8.7 3 次元数ベクトル空間を $\mathbb{R}^3$ とする. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1\,,\ \boldsymbol{a}_2\,,\ \boldsymbol{a}_3\}$ から, グラム・シュミットの正規直交化法（シュミットの正規直交化法ともいう）により $\mathbb{R}^3$ の正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1\,,\ \boldsymbol{u}_2\,,\ \boldsymbol{u}_3\}$ を構成しなさい.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 22)　　(固有番号 m222902)

8.8 4 点 $P(1, 3, 2),\ Q(1, 1, a+2),\ R(4, 0, 2),\ S(a+1, 6, -3)$ が同一平面上にあるとき, a の値を求めよ.

(名古屋工業大 22)　　(固有番号 m222906)

8.9 複素ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ と V 上の線形変換 f を考える.　ただし, $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ はいずれも零ベクトルではないとする. 以下のそれぞれの命題について, 正しければ証明を与え, 誤りであるならば反例をあげよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立であるならば, $\{f(\boldsymbol{a}_1),\ f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ も一次独立である.

(2) $\{f(\boldsymbol{a}_1),\ f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が一次独立であるならば, $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ も一次独立である.

(3) $\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が f の相異なる固有値であり, $\boldsymbol{a}_i$ が λ_i に対する固有ベクトルであるならば, $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立である.

(広島大 22)　　(固有番号 m224104)

8.10 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ を含む平面 α が, 座標の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 r の球面 β と接している.

(1) 点 P が球面 β 上にあるとき, 平面 α を表す方程式を求めよ.

(2) 点 P が球面 β 上にないとき, 平面 α に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ が満たすべき条件を求めよ.

(九州大 22)　　(固有番号 m224703)

8.11 O を原点とする座標空間内に 2 点 A, B があり, O, A, B は同一直線上にないとする. 点 B から直線 OA におろした垂線の足を H として,

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} \qquad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$$

とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{HB}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(2) 点 A, B の座標を $(-1, 2, 5)$, $(-3, 11, 13)$ とおくとき, 点 H の座標を求めよ.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224916)

8.12 平面 P が $x + y - z + 1 = 0$, 直線 f が $\dfrac{x-1}{2} = y + 1 = \dfrac{z}{4}$ で与えられるとき, 平面 P と直線 f の交点を求めよ.

(長崎大 22)　　(固有番号 m225016)

8.13 $\boldsymbol{R}^3$ において, ベクトル $\overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して,

(1) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は線形独立（一次独立）かどうかを調べなさい.

(2) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底かどうかを調べなさい.

(3) $\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ と $\overrightarrow{a_3}$ の線形結合（一次結合）で表されるかどうか調べなさい. 表される場合にはその線形結合を求め, 表されない場合にはその理由を説明しなさい.

(熊本大 22)　　(固有番号 m225202)

8.14 直交座標系 (x, y, z) における二つのベクトルを $\boldsymbol{a} = (-1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1, -2)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(首都大 22)　　(固有番号 m225901)

8.15 (1) 平面上の零ベクトルでない任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, シュワルツの不等式,

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$$

が成立することを示せ.

(2) シュワルツの不等式で等号が成り立つとき, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がどのような関係にあるか答えよ.

(宇都宮大 22)　　(固有番号 m226101)

9　行列

9.1　0 と 1 のみを成分とする 2×3 行列 A で,

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^tA\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ. ここで, ${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(埼玉大 22)　　(固有番号 m221402)

9.2　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ で与えられるとき, 以下の問いに答えよ.

(1)　A^{-1} を求めよ.

(2)　ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ として, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 x_1 と x_2 を求めよ.

(3)　ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$ として, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解が $x_1 = 0, x_2 = 0$ 以外の解を持つように, 定数 k の値を求めよ.

(4)　行列 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ として, ADF を求めよ.

(豊橋技科大 22)　　(固有番号 m222702)

9.3　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めよ.

(名古屋工業大 22)　　(固有番号 m222907)

9.4　3×3 行列 A と B は関係 $A^3 - AB = I$ を満たす. ただし, I は 3 次単位行列である.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1)　A^2 と A^{-1} を求めよ.

(2)　B を求めよ.

(名古屋工業大 23)　　(固有番号 m232908)

9.5　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として, 以下の (1),(2) に答えよ.

(1)　$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $A^2 - 5A + 6E$ および A^5 を求めよ.

(2)　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 2A - 8E = O$ を満たすとき, $a + d$ および $ad - bc$ を求めよ.

(三重大 22)　　(固有番号 m223117)

9.6 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ （k は実数）に対して次の問に答えよ.

(1) 行列 A^2, A^3 を求めよ.

(2) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ が 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合として表されるとき, k の値を求めよ.

(奈良女子大 22)　　(固有番号 m223201)

9.7 行列 A, B を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. ここで, a, b, c, d は実数である.

このとき, 実数 a, b, c, d がどのような条件を満たせば, $AB = BA$ が成立するか.

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223605)

9.8 次の各行列が逆行列をもつかどうかを判定しなさい. また, 逆行列をもつ場合, それを求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223610)

9.9 $(m+n)$ 次正則行列 A が

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ {}^tQ & R \end{bmatrix}$$

のように区分されているとする. ただし, P は m 次正方行列, Q は $m \times n$ 行列, R は対称な n 次正則行列, ${}^tQ$ は Q の転置行列である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $(m+n)$ 次正方行列 M を

$$M = \begin{bmatrix} E_m & -QR^{-1} \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

とおく. ただし, E_k は k 次単位行列, O はすべての成分が 0 である $n \times m$ 行列とする. このとき, 行列 M は正則行列であることを示せ.

(2) $MA\,{}^tM$ を $B = P - QR^{-1}\,{}^tQ$, O, ${}^tO$, R を用いて表せ.

(3) $|A| = |B||R|$ となることを示せ.

(4) $(MA\,{}^tM)^{-1}$ を求め,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}QR^{-1} \\ -R^{-1}\,{}^tQB^{-1} & R^{-1} + R^{-1}\,{}^tQB^{-1}QR^{-1} \end{bmatrix}$$

であることを示せ.

(広島大 22)　　(固有番号 m224105)

9.10 転置行列が逆行列となる正方行列を直交行列という. 以下の問いに答えよ.

(1) 直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ.

(2) A, B を n 次正方行列と s る. このとき $2n$ 次正方行列 $T = \begin{pmatrix} A & O \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であれば, A は直交行列であり, かつ B は正則行列でないことを示せ. ただし, O は n 次の零行列を表す.

(広島市立大 22)　　(固有番号 m224206)

9.11 一般に, n 次正方行列 A の (i,j) 成分を $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n\ ;\ j=1,2,\cdots,n)$ とするとき, A のトレース : $tr[A]$ を, $tr[A]=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ によって定義する. また, ${}^tA$ は A の転置行列を表すとする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 B の (i,j) 成分を $b_{ij}(i=1,2,3\ ;\ j=1,2,3)$ とする. このとき, ${}^tB$ と B の積 : ${}^tBB$ の (i,j) 成分を, B の成分で表せ.

(2) 成分がすべて実数である 3 次正方行列 B に対して, $tr[{}^tBB]=0$ ならば $B=O$ であることを示せ. ただし, O は零行列を表す.

(3) 成分がすべて実数である 3 次正方行列 C に対して,「${}^tC=C$ かつ $tr[C^4]=0$」ならば $C=O$ であることを示せ.

(九州大 22)　　(固有番号 m224712)

9.12 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224905)

9.13 次の行列は対角化可能か. 対角化が可能ならば対角化し, 不可能ならばその理由を述べよ.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　$(a \neq 0)$

(2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224906)

9.14 行列 $A=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $|A|$（A の行列式）を求めよ.

(2) A^{-1}（A の逆行列）を求めよ.

(3) $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_3$ の内積を求めよ.

(4) $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ.

(5) $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて表せ.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224922)

9.15 $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 \\ y_3 = x_2 \end{cases}$　を行列を用いて表わせ.

(長崎大 22)　　(固有番号 m225017)

9.16 (1) n 次行列 P が $P^TP = I$ を満たし, $P + I$ は正則であり, I は n 次単位行列であるとする. ここで P^T は P の転置行列である. このとき, $A = (P - I)(P + I)^{-1}$ に対し, $A(I + P^T) = (I - P^T)$ が成り立つことを示せ.

(2) $A(I + P^T) = (I - P^T)$ の両辺の行列を転置することで, $A^T = -(I + P)^{-1}(P - I)$ が成り立つことを示せ.

(3) 前問の結果を利用して, $A^T = -A$ が成り立つことを示せ.

(鹿児島大 22)　　(固有番号 m225405)

9.17 2 つの行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めなさい.

(2) $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^n$ （n : 整数）を求めなさい.

(3) (2) の結果を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を求めなさい.

(鹿児島大 22)　　(固有番号 m225408)

9.18 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) P の逆行列を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて, A^n （n は自然数）を求めよ.

(香川大 22)　　(固有番号 m225702)

9.19 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix}$ が正則行列となるための k に対する条件を求めよ. また, $k = 0$ としたときの A の逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 22)　　(固有番号 m226003)

10　行列式

10.1 $\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ となる a を求めよ.

(北見工業大 22)　　(固有番号 m220205)

10.2 λ を実数とし $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 3 次の数ベクトルとする. 次の各問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列とする行列を A とするとき, 行列式 $|A| = 0$ を満たす λ の値を求めなさい.

(2) λ は (1) で求めた値とする. このとき $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表しなさい.

(東京農工大 22)　　(固有番号 m220901)

10.3　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 22)　　(固有番号 m221801)

10.4　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(新潟大 22)　　(固有番号 m222002)

10.5　次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

(新潟大 22)　　(固有番号 m222006)

10.6　次の 3 次正方行列 A が直交行列であるとき, $\det A = |A| = 1$ または -1 であることを示せ.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

(新潟大 22)　　(固有番号 m222015)

10.7　次の 4 次行列 A, 4 次単位行列 E, およびパラメータ t に対して, 行列式 $\left|tE - A\right|$ を t について因数分解しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ -5 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 22)　　(固有番号 m222901)

10.8　(1)　次の等式を証明しなさい.

$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$$

(2)　(1) を利用して, 次の行列の行列式の値と逆行列を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(三重大 22)　　(固有番号 m223103)

10.9　次の行列 A の行列式 $|A|$ 及び逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(三重大 22)　　(固有番号 m223110)

10.10 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(2) 等式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - bc + cd)^2$ を示せ.

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{bmatrix}$ について,

${}^tA = -A$ を示し, これを用いて $\det(A) = 0$ を証明せよ.

(神戸大 22) (固有番号 m223806)

10.11 1 から 9 までの数字を並べて 3 次正方行列 A を作る. ただし, すべての数字を一度ずつ使うこととする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の行列式が 0 であるようなものと, 0 でないようなものの例を一つずつ作れ.

(2) 階数が 1 であるような行列 A は作れないことを証明せよ.

(岡山大 22) (固有番号 m224003)

10.12 行列 A を

$A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A^2 を計算せよ.

(2) 次の行列式の値をゼロにする $a,\ b,\ c$ をすべて求めよ.

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

(愛媛大 22) (固有番号 m224605)

10.13 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

(島根大 22) (固有番号 m225805)

10.14 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $a + b + c = 0$ のとき, A の行列式の値を求めよ.

(2) A の行列式を因数分解せよ.

(はこだて未来大 22)　　　(固有番号 m226302)

10.15 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 16 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列

(2) 連立 1 次方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

の解を求めよ.

(金沢大 22)　　(固有番号 m222204)

11.5 次の連立 1 次方程式を解け. 解がなければその理由を示せ.

(1) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+5y+6z=2 \\ y+4z=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \\ y+4z=0 \end{cases}$

(福井大 22)　　(固有番号 m222419)

11.6 (1) 次の行列 A の階数 (rank$A$) を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の連立方程式が解をもつような定数 a の値を求め, そのときの一般解を示せ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$$

(岐阜大 22)　　(固有番号 m222602)

11.7 次の連立一次方程式が解をもつための条件（a の値）を求め, その条件のもとでの一般解を示せ.

$$\begin{cases} x+y-2z+u=2 \\ -x-2y+3z-u=3 \\ 2x+y-3z+2u=a \end{cases}$$

(豊橋技科大 23)　　(固有番号 m232703)

11.8 次の連立一次方程式が解をもつように定数 k の値を定め, そのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x+3y-z=k & \cdots\cdots \quad ① \\ 2x+y+3z=5 & \cdots\cdots \quad ② \\ 3x+2y+4z=9 & \cdots\cdots \quad ③ \end{cases}$$

(名古屋工業大 23)　　(固有番号 m232901)

11.9 $x_1,\ x_2,\ x_3$ についての連立方程式 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ を考える. ただし

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

とする. このとき $|B| \neq 0$ であるとして, 連立方程式の解が

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}$$

とかけることを示せ.

(三重大 22)　　(固有番号 m223111)

11.10 $x_1,\ x_2,\ x_3$ を未知変数とする連立方程式 (A)

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + a_{i4} = 0\ , \quad i = 1,2,3,4$$

を考える. ここで $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

(1) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ の時, この連立方程式 (A) の解をすべて求めよ.

(2) $a_{i1} = 1,\ a_{i2} = (-1)^i,\ a_{i3} = u^{i-1}\ (1 \leq i \leq 4)$ および $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 1,\ a_{44} = u$ の時, この連立方程式 (A) が解をもつような実数 u の値をすべて決定せよ.

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

の時, 連立方程式 (A) が解をもつ必要十分条件を a_{ij} を用いて表せ.

(神戸大 22)　　(固有番号 m223802)

11.11 3 次元空間（$xyz-$ 空間）内において, 与えられた 3 つの平面のいずれにも属する点があるとき, その点をその 3 つの平面の「共有点」と呼ぶ. たとえば, $xy-$ 平面, $yz-$ 平面, $zx-$ 平面の共有点は, 原点 $(0,0,0)$ である. 3 次元空間内の次の 3 つの平面を考える. ここで, a は定数とする.

$$\text{平面 } S_1 = \{(x,y,z) \mid x - y + 2z = 2\}$$

$$\text{平面 } S_2 = \{(x,y,z) \mid 2x + 3y + z = 3\}$$

$$\text{平面 } S_3 = \{(x,y,z) \mid 4x + y + az = 1\}$$

このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) $a = 4$ とする. このとき, 3 つの平面 $S_1,\ S_2,\ S_3$ の共有点を求めよ.

(2) $a = 5$ とする. このとき, 3 つの平面 $S_1,\ S_2,\ S_3$ の共有点は存在するかどうか, 理由を述べて答えよ.

(九州大 22)　　(固有番号 m224711)

11.12 次の行列 M と列ベクトル $\boldsymbol{x},\ \mathbf{0}$ について, 以下の問いに答えよ.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 8 \\ -2 & -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 M の階数を求めよ.

(2) 連立方程式 $M\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の一般解を求めよ.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224911)

11.13 次の連立一次方程式について, 次の各問に答えよ.

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & & & - & 2x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & -7 \end{cases}$$

(1) この連立一次方程式を, 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とあらわしたときの, 係数行列 A を記せ. ただし, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする.

(2) 係数行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 上の連立一次方程式を解け.

(宮崎大 22)　　(固有番号 m225301)

11.14 次の連立 1 次方程式が自明な解以外の解をもつのは定数 a がどのような値のときか.

$$\begin{cases} (2-a)x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & (2-a)y & = & 0 \end{cases}$$

(島根大 22)　　(固有番号 m225806)

11.15 次の連立一次方程式が解を持つための必要十分条件となる定数 a, b, c の関係式を求めよ. またそのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = 2b \\ 3x + 4y + 5z = c \end{cases}$$

(首都大 22)　　(固有番号 m225902)

12　線形変換

12.1 $f \ : \ R^2 \to R^3$ を線形写像とする. $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$f(\boldsymbol{u}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるとする.

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ.

(北見工業大 22)　　(固有番号 m220204)

12.2 二次元平面上で x - y座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x' - y' とする. ある点 P の位置 (x, y) はこの新しい座標軸では (x', y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ①$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.

(2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ②$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

(3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか、答えよ.

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220606)

12.3 行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ で定義される xy 平面の 1 次変換について，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 $y = 3x$ の像を求めよ．

(2) 原点を通る直線のうち，その像が原点だけになるものを求めよ．

(3) 原点を通る直線のうち，その像がその直線自身になるものを求めよ．

(4) この 1 次変換による xy 平面の像を図示せよ．

(電気通信大 21)　　(固有番号 m211001)

12.4 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において, 平面 $P : x - y + z + 1 = 0$ と直線 $L : 2(x-1) = -y = -z$ を考える．

(1) 平面を張る 2 つの線形独立（一次独立）なベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, 直線を張るベクトル $\boldsymbol{a}_3$ を求めよ．

(2) 任意の点を直線 L と平行に平面 P 上へ射影する線形変換を表す行列 A を求めよ．

(3) 任意の点を平面 P と平行に直線 L 上へ射影する線形変換を表す行列 B を求めよ．

(筑波大 22)　　(固有番号 m221313)

12.5 (1) xy 平面上の点 (x, y) の y 軸に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい．

(2) xy 平面上の点 (x, y) の直線 $y = ax$ に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい．

(3) 行列の積 BA が角度 $\dfrac{\pi}{3}$ の反時計まわりの回転を表すとき，a の値を求めなさい．

(長岡技科大 21)　　(固有番号 m212102)

12.6 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ で与えられる 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により，曲線 $y = x^2$ の上の点 (x, y) は，曲線 $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ の上の点 (x', y') に移される．$a > 0$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) x, y を用いて x' および y' を表せ．

(2) a を用いて b を表せ．

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，1 次変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ によりベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移される．$|\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}|$ であるとき，a の値を求めよ．

(4) $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(豊橋技科大 21)　　(固有番号 m212703)

12.7 下記の式で表される楕円 C_1 を反時計回りに 45° 回転して得られる像を C_2 とする．

$$c_1 \ : \ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

(1) C_1 を C_2 に写す一次変換を表す行列 A を求めよ．

(2) 図形 C_2 を表す式を求めよ．

(3) 図形 C_2 上の点 $P(x,\ y)$ において, P が C_2 上を移動する時, $x,\ y$ がそれぞれとる値の範囲を求めよ．

(豊橋技科大 23)　　(固有番号 m232702)

12.8 (1) xy 平面内において, 3 点 $(-2,\ 19)$, $(1,\ -8)$, $(3,\ 4)$ を通る放物線の式 $y = ax^2 + bx + c$ を, 行列を使って求めることを考える. 放物線の式の係数を求める連立一次方程式を書いて, それを行列を使って表現しなさい.

(2) (1) で求めた行列を用いた式を解き, 放物線の式を求めなさい.

(3) xy 平面内の点を原点を中心として反時計まわりに 45° 回転させる 1 次変換行列を求めなさい.

(4) (2) で求めた式で表される放物線を, 原点を中心として反時計まわりに 45° 回転させて得られる放物線の式を求めなさい.

(三重大 22)　　(固有番号 m223109)

12.9 x, y をデカルト座標とする R^2 において, 原点以外の点 P を原点 O のまわりに角度 θ だけ反時計回りに回転させた点を P_θ で表す. いま, P を x-軸に関して線対称の位置に移した点を P' とする. さらに, P' を直線 $ax + by = 0$ に関して線対称の位置に移した点を P'' とする. ただし, a, b は定数で, 同時にゼロとはならない. 位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP_\theta}$, $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OP''}$ をそれぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p_\theta}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}''$ で表す. 以下の (1)〜(4) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{p_\theta} = R\boldsymbol{p}$ をみたす行列 R を見出せ.

(2) $\boldsymbol{p}' = M\boldsymbol{p}$ をみたす行列 M を見出せ.

(3) $\boldsymbol{p}'' = N\boldsymbol{p}$ をみたす行列 N を見出せ.

(4) $\boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p_\theta}$ が成り立つように, 直線 $ax + by = 0$ を定めよ.

(京都大 22)　　(固有番号 m223301)

12.10 (1) 座標平面上の点を直線 $y = ax$（a は実数）に関して対称な点に移す一次変換を考える.
$a = \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ とおくとき, この一次変換を表す行列 A を θ を用いて表せ.

(2) 2 次直交行列 B の行列式が -1 であるとき, B の表す一次変換はある直線に関して対称な点を対応させる変換であることを示せ.

(岡山大 22)　　(固有番号 m224004)

12.11 原点 $O(0, 0)$, 点 $A(2, 1)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 点 A に対して x 軸に関して線対称な点 B を求めなさい.

(2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|$ を求めなさい. それらを使い $\angle AOB = \theta$ とした時の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めなさい.

(3) 点 A を原点の周りに反時計回りに 45° 回転させた点 C の座標を求めなさい.

(鹿児島大 22)　　(固有番号 m225409)

13 固有値とその応用

13.1 次の行列 A について以下の設問 (1), (2) に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(2) A の対角化行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. また, そのときの行列 P を示せ.

(北海道大 22)　　(固有番号 m220104)

13.2 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ に関して次の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ および逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような正則な 2 次正方行列 P をひとつ求めなさい.

(4) 任意の自然数 n に対し A^n を求めなさい.

(岩手大 22)　　(固有番号 m220302)

13.3 次のカッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の階数は $\boxed{(ア)}$ であり, A の固有値は, 小さい方から順に $\boxed{(イ)}$, $\boxed{(ウ)}$, $\boxed{(エ)}$ である.

(2) 行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の行列式の値は $\boxed{(オ)}$ である. B の逆行列について, B^{-1} の $(2,1)$ 成分は $\boxed{(カ)}$ である。

(秋田大 22)　　(固有番号 m220401)

13.4 行列 A を次のように定義する.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは任意でよい.

(2) A^5-13A^3 を計算せよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を 1 つ求めよ. また, その逆行列 P^{-1} を求めよ.

(4) A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(東北大 22)　　(固有番号 m220503)

13.5 (1) n を自然数とする. 複素数を成分とする n 次正方行列が n 個の相異なる固有値を持てば, 対角化可能であることを示せ.

(2) a,b,c,d を複素数とする. 2 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が対角化できるための必要十分条件を a,b,c,d の関係を用いて表せ.

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220605)

13.6 次の実対称行列 B の固有値, 固有ベクトルを求め, 直交行列により対角化しなさい.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶に水女子大 22)　　(固有番号 m220612)

13.7 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $A^2,\ A^{-1},\ |A|$ を求めよ.

(2) A の全ての固有値を求めよ.

(3) $(A-I)^2 = 0$ が成り立つことを示せ. ただし, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(4) 任意の実数 t について, ある t の多項式 $g(t)$ と定数 a, b が存在して

$$t^{100} = g(t)(t-1)^2 + at + b$$

が成り立つ. a と b を求めよ.

(5) A^{100} を A と I を用いて表せ.

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ を自然対数の底 e を用いて表せ. ただし, $A^0 = I,\ 0! = 1$ である.

(東京大 22)　　(固有番号 m220701)

13.8 $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求め, A を対角化せよ.

(2) A^n を求めよ.

(東京工業大 22)　　(固有番号 m220804)

13.9 A を下に定める 2×2 行列とし, M は A などを用いて下のように定義される 4×4 行列とする（I は単位行列, O は零行列）. 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} -I & 2A^{-1} \\ A & O \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) M の行列式 $\det M$, および M の逆行列 M^{-1} を求めよ.

(3) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ について $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ の解を求めよ.

(電気通信大 22)　　(固有番号 m221001)

13.10 以下の行列 A について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 互いに直交するように定めよ.

(2) A の行列式を求めよ.

(3) n を 1 以上の整数とする. A^n を求めよ.

(4) A の逆行列を求めよ.

(横浜国立大 22)　　(固有番号 m221101)

13.11 (1) 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して, $A^2,\ A^3,\ A^4$ を計算せよ.

(2) B が n 次正方行列とする. ある自然数 m に対して $B^m = O$ ならば B の固有値はすべて 0 であることを示せ.

(3) C が n 次正方行列とする. ある自然数 m に対して $C^m \neq O$, $C^{m+1} = O$ ならば $n \geq m+1$ であることを示せ.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221301)

13.12 (1) A を正則行列とするとき. ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ を示せ. ただし, ${}^t(A^{-1})$ は A^{-1} の転置行列, ${}^tA$ は A の転置行列とする.

(2) Q を直交行列とするとき, $\det(Q) = \pm 1$ であることを示せ. ただし, $\det(Q)$ は Q の行列式とする.

(3) S を実交代行列とするとき, S の固有値は 0 または純虚数であることを示せ.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221302)

13.13 行列 A について以下の設問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.

(2) 前問で得た固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ とする. $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルの長さが 1 となるように選ぶものとする.

(3) A を対角化する行列 L とその逆行列 L^{-1} を求めよ.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221309)

13.14 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -11 & 7 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(埼玉大 22)　　(固有番号 m221401)

13.15 (1) つぎの行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 0 \\ y & 1 & 0 & y \\ z & 0 & 1 & z \\ 0 & w & w & 1 \end{vmatrix}$$

(2) つぎの行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) つぎの行列の固有値, 固有ベクトルの組をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 22)　　(固有番号 m221407)

13.16 実数 α, β に対して, 2 次実正方行列 A で

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I = O$$

(I は 2 次単位行列, O は 2 次零行列) を満たすものを考える. 但し, A は I の定数倍ではないとする. 以下に各問に答えよ.

(1) $A - \alpha I$ と $A - \beta I$ は, どちらも正則でないことを示せ.

(2) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{y} = (A - \beta I)\boldsymbol{x}$ とおく. このとき任意の $\boldsymbol{x}$ に対して,

$$(A - \alpha I)\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

となることを示せ. また, α は A の固有値であることも示せ. さらに, $\boldsymbol{p}_1$ を α に対する固有ベクトルとするとき,

$$(A - \beta I)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$$

を満たす列ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ で, $\{\boldsymbol{p}_1\,,\ \boldsymbol{p}_2\}$ が一次独立となるものが存在することを示せ.

(3) (2) の $\boldsymbol{p}_1\,,\ \boldsymbol{p}_2$ を用いて, 2 次正方行列 P を

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_1\,, \quad P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_2$$

であるように定める. $P^{-1}AP$ および $p^{-1}A^nP$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を求めよ.

(茨城大 22)　　(固有番号 m221706)

13.17 (1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい. 固有ベクトルを求める際, 適当な定数を用いてもかまいません.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) 前問で求めた固有ベクトルを列として並べた行列を P とします. 逆行列 P^{-1} を求めなさい.

(3) 前問で求めた P^{-1} を用いて, $P^{-1}AP$ を計算しなさい.

(4) 前問で求めた $P^{-1}AP$ を計算することにより, A^N を求めたい. どのようにしたら求められるか方針を示し, そのあと具体的に計算しなさい.

(山梨大 22)　　(固有番号 m221806)

13.18 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(新潟大 22)　　(固有番号 m222008)

13.19 任意の x, y, z について, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix}$ となる 3×3 行列 A を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ.

(3) ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ となる直交行列 P を求めよ. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列である.

(金沢大 22)　　(固有番号 m222201)

13.20 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 固有多項式 $\Phi_A(t) = \det(tE - A)$ を求めよ. ただし, E は 3 次の単位行列である.

(2) $(A-2E)^2$, $(A-2E)^3$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(金沢大 22)　　(固有番号 m222205)

13.21 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(金沢大 22)　　(固有番号 m222213)

13.22 (1) 正方行列 A, P, D の間に $P^{-1}AP = D$ の関係があるとき, A^n (n は自然数) を P, P^{-1}, D, n を用いて表せ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする.

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルのうち, 大きさが 1 の二つを $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とする. ただし, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ で, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が固有値の小さいほうに対応した固有ベクトルとする. このとき, $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とした場合の $Q^{-1}BQ$ を求めよ.

(3) (1), (2) の結果をもとに, B^{10} を求めよ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする. なお, 必要ならば $2^{10} = 1024$, $3^{10} = 59049$, $5^{10} = 9765625$ の値を用いよ.

(富山大 22)　　(固有番号 m222304)

13.23 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ がある.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ. n は整数とし, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外の $\boldsymbol{x}$ を求めること.

(福井大 22)　　(固有番号 m222409)

13.24 $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

次に, 得られた固有値の中で負の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 22)　　(固有番号 m222414)

13.25 行列 $A = \Bigg(\begin{matrix} -1 & 2 \end{matrix}$

(京都工芸繊維大 22)　　(固有番号 m223401)

13.30 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の指数関数 $\exp(A)$ を求める. ただし, a, b および c は実数ある. また, E を単位行列として, 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を

$$\exp(A) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

のように定義する.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列によって対角化される. 行列 A を対角化する直交行列の中で対称行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を求めよ.

(4) $\exp(A)$ の行列式 $|\exp(A)|$ を求めよ.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223501)

13.31 2 次元平面上の点 $A(1, 0)$ を点 $A'(a, 1-b)$ に, 点 $B(1, 1)$ を点 $B'(a+b, 1+a-b)$ に移す 1 次変換を f とする. ただし, a, b は実数とする. また, f を表す行列を F とする.

(1) 行列 F を a と b を用いて表せ.

(2) 行列 F の固有値を求めよ. また, 2 つの固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 F の 2 つの固有値が異なる実数値となる場合に, $P^{-1}FP$ を対角行列とする正則行列 P , 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ. ただし, 正則行列 P の列ベクトルの長さは 1 とする. ここで P^{-1} は行列 P の逆行列である.

(4) (3) で求めた正則行列 P の列ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(5) 原点 $(0, 0)$ 以外の任意の点を X とする. また, 点 Y は, 点 X が 1 次変換 f によって移された点とする. 原点 $(0, 0)$ から X までの距離, および Y までの距離を, それぞれ d_X, d_Y とする. ここで a と b は (4) で求めた必要十分条件を満たし, 定数とする. また, 点 X は自由に選べるものとする. このとき, 2 つの距離の比 d_Y/d_X の最大値を a と b を用いて表せ.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223506)

13.32 行列 A をつぎのように定義する：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを, それぞれ求めよ.

(3) 問い (1) と問い (2) の結果を使って, 行列 A を対角化せよ.

(4) 行列 A の n 乗, A^n を求めよ. ただし n は自然数とする.

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223604)

13.33 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ. なお ${}^{t}PP = E$（単位行列）をみたす実正方行列を直交行列という.

(神戸大 22)　(固有番号 m223801)

13.34 以下で定義される 3 次の正方行列 A, B について, 固有値と, 各固有値に対する固有空間を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$　(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

(神戸大 22)　(固有番号 m223807)

13.35 次の 3 次正方行列 A に対し, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P, およびその逆行列 P^{-1} を求めよ.

(広島市立大 22)　(固有番号 m224205)

13.36 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい. 固有ベクトルは, いずれか一つの固有値に対して求めればよい.

(山口大 22)　(固有番号 m224302)

13.37 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 最大である固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(徳島大 22)　(固有番号 m224401)

13.38 3×3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 次の関数式を満たす直交行列 T をひとつ求めよ.

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) α と β を定数とし, 3×3 行列 B を次で定義する.

$$B = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

このとき, B と B^2 を計算せよ.

(4) $C^2 = A$ を満たす行列 C をひとつ求めよ.

(高知大 22)　　(固有番号 m224504)

13.39 $A,\ B$ を 3 次実対称行列とする. 一般に, ${}^tP$ は行列 P の転置行列を表わすものとする.

(1) ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在するなら, $BA = AB$ であることを示せ.

(2) A の固有値がすべて等しいなら, ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在することを示せ.

(3) $BA = AB$ であるなら, ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在することを示せ.

(九州大 22)　　(固有番号 m224706)

13.40 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 P の行列式 $\det P$ を求めよ.

(2) 行列 P の逆行列 P^{-1} を求めよ.

(3) PAP^{-1} を計算せよ.

(4) 行列 A の固有値を求めよ.

(5) 行列 A が対角化可能かどうか理由を述べて答えよ.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224912)

13.41 行列 $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有方程式を求めよ.

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ.

(3) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ に対する各々の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を求めよ.

(4) A を対角化したときの対角行列 $B(= P^{-1}AP)$ および正則行列 P を求めよ.

(5) A^n（n : 自然数）を求めよ.

(佐賀大 22)　　(固有番号 m224921)

13.42　次の行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(長崎大 22)　　(固有番号 m225006)

13.43　次の 2 次曲線の標準形を求めよ.

$2x^2 + 6xy + 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$

(長崎大 22)　　(固有番号 m225007)

13.44　次の行列について考える. 以下の設問に答えよ.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) $A^2 = A \times A$ を求めよ.

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(4) A の固有値を求めよ.

(長崎大 22)　　(固有番号 m225008)

13.45　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルが $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}$ となるように, a, b, c, d を求めよ.

(長崎大 22)　　(固有番号 m225018)

13.46　(1) 次の行列 A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 設問 (1) の行列 A に対し, ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(島根大 22)　　(固有番号 m225807)

13.47　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式を 1 列について余因子展開して求めよ.

(2) 行列 A の 3 つの列ベクトルは線形独立といえるか. その根拠と共に示せ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(島根大 22)　　(固有番号 m225809)

13.48　次の行列 A について以下の設問に答えよ. ただし, $0 < a < 1/2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

(1) A^2 を計算せよ.

(2) $|A|$ を計算せよ.

(3) A^{-1} を求めよ.

(4) A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

(5) A^{-1}, A^2 および A^n の固有値を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(6) A^n を求めよ.

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(島根大 22)　　(固有番号 m225812)

13.49 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) A^n を求めよ. 但し n は正の整数とする.

(首都大 22)　　(固有番号 m225903)

13.50 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & a & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ としたとき, $|A| = -2$ となった. この時の a の値を求めよ.

(2) a が (1) の条件を満たすとき, A の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, a が 2 つ以上の値を取るときは最も小さい値を採用する. また, 固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.

(3) (2) で求めた固有値および固有ベクトルを用いて, A を対角化せよ. その時の対角化行列も求めよ.

(宇都宮大 22)　　(固有番号 m226102)

13.51 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルのうち, 成分がすべて整数であるものをそれぞれ一つ求めよ.

(はこだて未来大 22)　　(固有番号 m226301)

13.52 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 22)　　(固有番号 m226402)

13.53 $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ. ただし, $a \neq b$ である.

(1) P の行列式の値と逆行列とを求めなさい.

(2) PQP^{-1} の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(和歌山大 22)　　(固有番号 m226501)

13.54 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) A の行列式の値と逆行列を求めよ.

(2) A の 2 つの固有値と, 各々の固有値に属する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有値の 1 つにつき固有ベクトル 1 つを求めればよい.

(東京工科大 22)　　(固有番号 m226908)

14 線形空間など

14.1 次の行列で定められる $\mathbb{R}^4$ の線形変換の核と像を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 7 \\ -2 & -4 & -7 & -6 \\ -1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220604)

14.2 次の行列 A で表される線形写像 f を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f の核 $(\mathrm{Ker}\, f)$ の基底と次元を答えなさい.

(2) f の像 $(\mathrm{Im}\, f)$ の基底と次元を答えなさい.

(注) ここで, 線形空間 V から W への線形写像 $F : V \to W$ の核とは, $\mathrm{Ker}\, F = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ のことで, 像とは $\mathrm{Im}\, F = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである. また, $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220611)

14.3 $V = \mathbb{R}^4$ とし, $B = \{\boldsymbol{v}_1\, ,\ \boldsymbol{v}_2\, ,\ \boldsymbol{v}_3\, ,\ \boldsymbol{v}_4\}$ を V の基底とする. $f : V \to V$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_2\, , \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_3\, , \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1\, , \quad f(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0}$$

となる線形写像とし, $g : V \to V$ を

$$g(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\, , \quad g(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3\, , \quad g(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1\, , \quad g(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{v}_4$$

となる線形写像とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}\, f$ の基底と次元, $\mathrm{Im}\, f$ の基底と次元を求めよ.

(2) 線形写像 $g : V \to V$ の基底 B に関する表現行列 M を求めよ. さらに, 行列式 $\det M$ を求めよ.

(3) g は同型写像である. g の逆写像 g^{-1} の基底 B に関する表現行列 N を求めよ.

(電気通信大 21)　　(固有番号 m211002)

14.4 $\nu = \{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が 3 次元線形空間 V の基底であり, 1 次変換 $f : V \to V$ が

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3\ , \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3\ , \quad f(\boldsymbol{v}_3) = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3\ ,$$

を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) f の基底 ν に関する表現行列 A を求めよ.

(2) 合成写像 $g = f \circ f$ の, 基底 ν に関する表現行列 B を求めよ.

(3) $\mathrm{rank}A$, $\mathrm{rank}B$ を それぞれ求めよ.

(電気通信大 22)　　(固有番号 m221002)

14.5 実数 R を係数とする変数 x に関する高々2 次の多項式の全体を V と表わす.

即ち, $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \,|\, a_0,\, a_1,\, a_2 \in R\}$. 但し, $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ は, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ のとき, そして, そのときに限り成立すると仮定する. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\beta = \{1, x, x^2\}$ は V の一つの基底なることを示しなさい.

(2) $f(x) \in V$ に対して, f の x に関する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を対応させる写像を D と表わす. D は V から V への線形写像であることを示しなさい.

(3) D に対して, 基底 β に関する行列表現を求めなさい. また, D の rank はいくつであるか答えなさい.

(4) V から R への線形写像全体を V^* と表す. V^* は V と同じ次元を持つ線形空間になることが知られているが, このとき, 以下の条件を満たす $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in V^*$ は V^* の一つの基底になることを示しなさい.

$\alpha_0(1) = 1\,;\quad \alpha_0(x) = 0\,;\quad \alpha_0(x^2) = 0\,;$
$\alpha_1(1) = 0\,;\quad \alpha_1(x) = 1\,;\quad \alpha_1(x^2) = 0\,;$
$\alpha_2(1) = 0\,;\quad \alpha_2(x) = 0\,;\quad \alpha_2(x^2) = 1\,;$

(5) $f(x) \in V$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ を対応させる写像を I と表わす. I は線形写像であることを示しなさい.

(6) I を α_0 , α_1 , α_2 の線形結合で表わしなさい.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221316)

14.6 実数体上のベクトル空間 V 上の一次変換 f に対して, V の部分空間 $\mathrm{Ker}\ f$ を

$$\mathrm{Ker}\ f = \{x\ :\ f(x) = 0\,,\ x \in V\}$$

と定義する. また, $u_1,\ u_2, \cdots, u_h$ を $\mathrm{Ker}\ f$ の基底とし, それに $v_1,\ v_2, \cdots, v_k$ を加え V の基底とする. 以下の各問いに答えよ.

(1) $v_1,\ v_2, \cdots, v_k$ が $\mathrm{Ker}\ f$ を法として一次独立である, すなわち

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k \in \mathrm{Ker}\ f \quad \text{ならば} \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

となることを示せ.

(2) $f(v_1)\,,\ f(v_2)\,, \cdots, f(v_k)$ が一次独立であることを示せ.

(3) $f(V) = \{f(x)\ :\ x \in V\}$ とするとき,

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\ f + \dim f(V)$$

となることを示せ.

(茨城大 21)　　(固有番号 m211705)

14.7 実数を成分にもつ n 次列ベクトル全体からなるベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ で表す. すべての成分が実数である n 次正方行列 A に対して, $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\mathrm{Ker}A$ と $\mathrm{Im}A$ を次のように定める.

$$\mathrm{Ker}A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}\,, \quad \mathrm{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

ただし, $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.

以下の各行列 A について, $\mathrm{Ker}A$ および $\mathrm{Im}A$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(茨城大 22) (固有番号 m221702)

14.8 ベクトル空間 V, W とその間の線形写像を $f : V \to W$ として, 次の問に答えなさい.

(1) V のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, スカラーを k, ℓ とするとき, f が線形写像である定義式を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および k, ℓ を用いて表しなさい.

(2) V を基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を持つ 2 次元実ベクトル空間, W を基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を持つ 3 次元実ベクトル空間とする.

$f(\boldsymbol{a}_1) = 2\boldsymbol{b}_1 - 4\boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3\,, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = 3\boldsymbol{b}_1 - 6\boldsymbol{b}_2 - 3\boldsymbol{b}_3$ とすると,

f の像と核は原点を通る直線（1 次元実ベクトル空間）であることを示し, この直線を求めなさい.

(山梨大 22) (固有番号 m221802)

14.9 (1) a, b を複素数とするとき, $A = \dfrac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ はユニタリ行列であることを示せ. ただし, $|a|$, $\bar{a}$ はそれぞれ a の絶対値および複素共役を表す.

(2) $U = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$ のとき, $U^{-1}BU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B について, B^n を求めよ. ただし i は虚数単位である.

(新潟大 22) (固有番号 m222012)

14.10 n 次実正方行列全体の集合 $M(n, \boldsymbol{R})$ は, 行列の通常の和とスカラー倍のもとで実ベクトル空間になる. $T_r : M(n, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を $A = (a_{ij}) \in M(n, \boldsymbol{R})$ に対して, $T_r(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ と定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) T_r は線形写像であることを示せ.

(2) T_r の核 $\mathrm{Ker}(T_r) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \mid T_r(A) = 0\}$ は $M(n, \boldsymbol{R})$ の部分空間になることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker}(T_r)$ の次元を求めよ.

(富山大 22) (固有番号 m222309)

14.11 $\boldsymbol{R}^n$ において定義された実数値関数 F が凸関数であるとは, 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の $\lambda (0 < \lambda < 1)$ とに対し, 次の不等式が成り立つことである.

$$F(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leq \lambda F(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)F(\boldsymbol{y})$$

特に, A を実対称行列として, $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\, A\boldsymbol{x} \rangle$ とおく. ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^n$ の標準内積を表す.

(1)〜(2) に答えよ.

(1) 次の 3 条件は同値であることを示せ.

(a) $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle$ は凸関数である.

(b) 任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y},\ A\boldsymbol{y} \rangle \geq 2\ \langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y} \rangle$ が成り立つ.

(c) 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ が成り立つ.

(2) A をさらに正定値対称行列とし, 閉領域 D を $D = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid F(\boldsymbol{x}) \leq k\}$ で定義する. ただし, $k > 0$ は定数. このとき D は凸集合であることを証明せよ. すなわち, 任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in D$ と任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ とに対して, $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in D$ が成り立つことを示せ.

(京都大 22)　　(固有番号 m223304)

14.12 有限次元の実ベクトル空間について, つぎの各問いに答えよ.

(1) ベクトル空間の次元の定義を述べよ.

(2) V をベクトル空間, W を V の部分空間とする. V と W の次元が等しいならば, $W = V$ であることを証明せよ.

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223603)

14.13 3 次元実数空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 U が, 実数 a, b を用いて以下のように与えられているとする. このとき, 実数 a, b がどのような条件を満たせば, U は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間になるか.

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle|\ ax_1 + x_2 + x_3 = b \right\}$$

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223606)

14.14 次の行列 A が定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を一組求めよ.

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を一組求めよ.

(3) f を $\mathrm{Im}\, f$ に制限して得られる線形変換 $g : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ について, (2) で求めた基底に関する行列表示を求めよ.

(4) A の固有値をすべて求めよ.

(広島大 23)　　(固有番号 m234106)

14.15 標準内積の入った線形空間 $\mathbb{R}^4$ における次のベクトルを考える.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_1, ベクトル $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_2 とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 部分空間 $W_1 + W_2$ の直交補空間の次元を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ.

(3) W_1 の直交補空間を $W_1^\perp$ とする. ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

の直和分解 $\mathbb{R}^4 = W_1 \bigoplus W_1^\perp$ に伴う分解を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \left(\boldsymbol{y} \in W_1\,,\ \boldsymbol{z} \in W_1^\perp\right)$$

とし, ベクトル $\boldsymbol{y}$ を $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ と表す. 実数 $a,\ b$ を $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ を用いて表せ.

(広島大 23)　　(固有番号 m234107)

14.16 x を変数とする高々二次の多項式全体から集合を

$$P = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とする. P の元 $f(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ と $g(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ に対して加法 $f + g$ と定数倍 λf を次のように定義する.

① $(f+g)(x) = (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)$

② $(\lambda f)(x) = \lambda b_2 x^2 + \lambda b_1 x + \lambda b_0$

これにより P は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) P の元 x と x^2 は P において一次独立であることを示せ.

(2) P の元 $1,\ x,\ x^2$ は P の基底となることを示せ.

(3) P の任意の元 f に対して, 写像 $\varphi : P \to P$ を次で定義する.

$$\varphi(f)(x) = xf'(x)$$

ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す. このとき φ は線形写像となることを示せ.

(4) φ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ と φ の像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ を求めよ.

(高知大 22)　　(固有番号 m224503) ,

14.17 線形写像 $T\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay - az - w \\ ax + y - z - w \\ -x + y + az + 2w \end{pmatrix}$$

を考える. ただし, a は実数である.

(1) ベクトル空間

$$R(T) = \left\{ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ.

(2) ベクトル空間

$$N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;;\; T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0\,,\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ.

(九州大 22)　　(固有番号 m224708)

14.18　3 次縦ベクトル全体のなすベクトル空間を R^3 とする,

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ,\quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ,\quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} ,\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とする. 線形写像 $f : R^3 \to R^3$ は, 次を満たすものとする.

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ,\quad f(\boldsymbol{v_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} ,\quad f(\boldsymbol{v_3}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}\}$ は R^3 の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}$ の 1 次結合で表せ.

(3) $f(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

(4) f の像の 1 組の基底を求めよ.

(5) f の核の次元を求めよ.

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値としてもつことを示せ.

(島根大 22)　　(固有番号 m225801)

応用数学

15　応用数学

15.1　以下の設問 (1), (2) に答えよ.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = (y,\ -x,\ z)$ において, 位置 $A(1,1,1)$ から位置 $B(1,2,3)$ の線分 C の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ を求めよ. ここで, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ は, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と $d\boldsymbol{r}$ の内積を表す.

(2) 位置 $O(0,0)$ から位置 $D(2,4)$ の放物線 $y = x^2$ 上の曲線を曲線 C' とし, その曲線上の点を $(t,\ t^2)\quad [0 \leq t \leq 2]$ とする. このとき, スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$ において, 位置 O から位置 D までの曲線 C' に沿った積分 $\displaystyle\int_{C'} f(\boldsymbol{r})\, dt$ を求めよ.

(北海道大 22)　　(固有番号 m220102)

15.2　区間 $[-\pi,\ \pi]$ で定義される関数を $f(x) = x^2$ とする. このとき, 以下の設問 (1), (2) に答えよ.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2) (1) の結果を利用して,

$$\pi^2 = 6 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\cdots\right)$$

を導出せよ.

(北海道大 22)　　(固有番号 m220103)

15.3　実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす複素数である.

関数 $f(t)$ に関する次の微分方程式を, 初期条件 $f(0) = f'(0) = 0$ のもとで, ラプラス変換を用いて解きたい. 以下の問に答えよ.

$$tf''(t) + (3t-1)f'(t) + (2t-3)f(t) = 0$$

(1) $f'(t)$, $f''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $tf(t)$, $tf'(t)$, $tf''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(3) $F(s)$ に関する次の微分方程式が次のように与えられることを示せ.

$$(s+1)\frac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$$

(4) $F(s)$ に関する次の微分方程式を解いて, $f(t)$ を求めよ.

(東北大 22)　　(固有番号 m220504)

15.4　3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad ④$$

に対して, 以下の問いに答えよ. ここで $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ はそれぞれ $x,\ y,\ z$ 軸方向の単位ベクトルである。また $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ の発散, $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を求めよ $(r \neq 0)$. ただし, $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である.

(お茶の水女子大 22)　　(固有番号 m220608)

15.5　関数 $f(x) = \dfrac{x^{m-1}}{1+x^n}$ について

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

の値を求めたい. ただし, $m,\ n$ は自然数で, $m < n$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上で, 図 1 に示す $C = C_1 + C_2 + C_3$ の扇形 $\left(\text{半径 } R,\ \text{中心角} \dfrac{2\pi}{n}\right)$ の積分路が与えられている. この平面上の複素数を $z = x + iy$ (i は虚数単位) とするとき, 積分路 C の内部にある $f(z)$ の極を求めよ. ただし, $R > 1$ とする.

(2) C に沿っての複素積分

$$\int_C f(z)\, dz$$

の値を求めよ.

(3) $R \to \infty$ のとき, C_2 に沿っての複素積分

$$\int_{C_2} f(z)\,dz$$

の値を導出過程とともに示せ.

(4) 虚数単位 i を含まない形で

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

の値を求めよ.

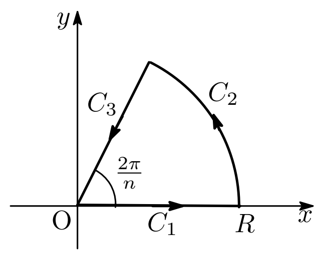


図 1

(東京大 22)　　(固有番号 m220704)

15.6 α を 0 でない複素数とし,

$$f(z) = \frac{1}{z(z-\alpha)}$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数 a, b を使って

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-\alpha}$$

と書くとき, a, b を α の式で表せ.

(2) $f(z)$ を $z=0$ を中心として, 領域 $0 < |z| < |\alpha|$ においてローラン展開せよ.

(3) $\alpha = 1+i$ とする. $z=0$ を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一周する経路に沿って $f(z)$ を積分したときの値を計算せよ.

(電気通信大 22)　　(固有番号 m221005)

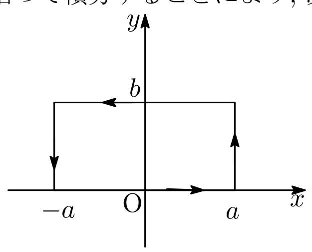
15.7 $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$（複号同順）という関係は, 複素関数としての指数関数, 三角関数の間にも成り立つ. この関係を使って, 逆余弦関数 $\arccos z$ ($\cos^{-1} z$ と書くこともある.) を対数関数を使って表せ.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221308)

15.8 (1) 次の式が成り立つことを示せ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

(2) 複素関数 $f(z) = e^{-z^2}$ を下図の四角形に沿って積分することにより, 次の定積分の値を求めよ. ただし, $a > 0,\ b > 0,\ i = \sqrt{-1}$ である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ibx - x^2}\,dx$$

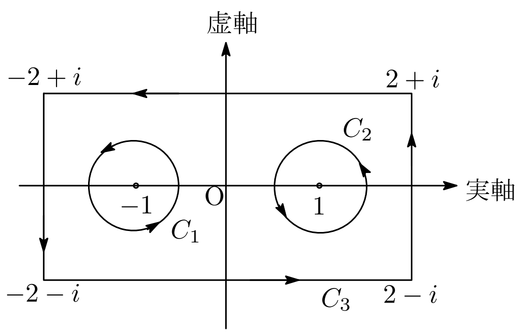


(筑波大 22)　　(固有番号 m221312)

15.9 以下の各閉曲線 $C_k (k = 1, 2, 3)$ に沿う複素積分

$$\int_{C_k} \frac{ze^z}{(z+1)(z-1)^2}\,dz \quad (k = 1, 2, 3)$$

の値を求めよ. ただし, 各閉曲線 $C_k (k = 1, 2, 3)$ はいずれも正の向きに一周するものとする.



(1) C_1 : -1 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

(2) C_2 : 1 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

(3) C_3 : 4 点 $-2-i,\ 2-i,\ 2+i,\ -2+i$ を頂点とする長方形の辺

(茨城大 22)　　(固有番号 m221704)

15.10 (1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\,a_x+\boldsymbol{j}\,a_y+\boldsymbol{k}\,a_z\ (\neq 0)$ と $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}\,b_x+\boldsymbol{j}\,b_y+\boldsymbol{k}\,b_z\ (\neq 0)$ の内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ がゼロであれば, 2 つのベクトルが直交することを示せ. また, 内積の成分表示が $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z$ で与えられることを示せ.

(2) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\,a_x+\boldsymbol{j}\,a_y+\boldsymbol{k}\,a_z\ (\neq 0)$ と $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}\,b_x+\boldsymbol{j}\,b_y+\boldsymbol{k}\,b_z\ (\neq 0)$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ であれば, 2 つのベクトルは平行であることを示せ.

(新潟大 22)　　(固有番号 m222003)

15.11 $\vec{c}$ を定ベクトル, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ を位置ベクトルとするとき, $\vec{c}\times\vec{r}$ の回転 (rot) を求めなさい.
ただし, $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ は, 右手直交座標系の x, y, z 軸に対する基本ベクトルである.

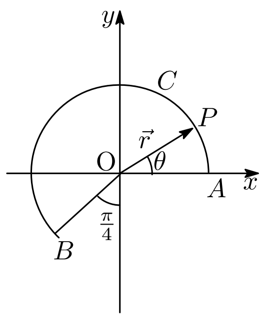
(金沢大 22)　　(固有番号 m222212)

15.12 図のように円 $x^2+y^2=25,\ z=0$ の x 軸上の点 A から B までの円弧を C, C 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{r}$, $\vec{r}$ と x 軸とのなす角を θ とする.

(1) $\displaystyle\int_C \vec{r}\cdot d\vec{r}$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\left|\int_C d\vec{r}\right|$ の値を求めよ.

(3) $\displaystyle\left|\int_C \vec{r}\times d\vec{r}\right|$ の値を求めよ.



(富山大 22)　　(固有番号 m222303)

15.13 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ に対して次のものを計算して求めよ.

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　　(2) 列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積

(福井大 22)　　(固有番号 m222408)

15.14 $z^3=\dfrac{1}{i}$ をみたす複素数 z を全て求めよ. ただし, i は虚数単位とする.

(静岡大 22)　　(固有番号 m222506)

15.15 以下の文章の $\boxed{\quad\quad}$ に適切な語句または数式を入れ, 解答欄に記入しなさい.
大きさがで 0 ない 3 つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ がある. いま, 2 つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{a}|,\ |\vec{b}|$ と表し, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\quad ① \quad}$

と表すことができる. ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交するための必要十分条件は,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\quad ② \quad}$

である.

内積については, 次が成り立つ.

交換法則：　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{③}}$

分配法則：　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\boxed{\text{④}}$

ここで, $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とすると,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{⑤}}$

である.

一方, 外積については, 次が成り立つ.

歪対称：　$\vec{a}\times\vec{b}=\boxed{\text{⑥}}$

分配法則：　$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\boxed{\text{⑦}}$

$\vec{a}\times\vec{a}=\boxed{\text{⑧}}$

ここで, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ であるとき,

$\vec{a}\times\vec{b}=\boxed{\text{⑨}}$

である. ただし, $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ は基本ベクトルである.

(三重大 22)　　(固有番号 m223104)

15.16 次の方程式を z について解きなさい. 解が複素数になる場合には $a+bi$ (a, b は実数, i は虚数単位) の形で表現しなさい.

$z^3=-64i$

(三重大 22)　　(固有番号 m223105)

15.17 (1) 複素数 z が以下の式で表されるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $i=\sqrt{-1}$ とする.

$$z=\left(\frac{4+3i}{1+2i}\right)^2-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$$

(a) z を極形式で表せ.

(b) z^n が実数となる最小の正の整数 n と, そのときの z^n を求めよ.

(c) $\sqrt[3]{z}$ を求めよ.

(2) 次の関数 $f(z)$ の極を求め, それらの点における留数を求めよ.

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^4-z^2}$$

(京都大 22)　　(固有番号 m223305)

15.18 D を複素平面上の単連結な開集合とする. 複素関数 $f(z)$ は D 上で正則であり, D 上で零点を有しないとする. D 上の一点 z_0 において $\arg f(z_0)$ を定めることにより, 関数 $u(x,y)=\arg f(z)$ を D 上の連続関数として定めることができる. ここに, $x,\ y$ は, それぞれ z の実部, 虚部である. このとき, $u(x,y)$ は D において調和関数であることを示せ.

(京都大 22)　　(固有番号 m223306)

15.19 $C(r)$ を複素平面内における原点を中心とする半径 $r>0$ の円周とし, $I(r)$ を

$$I(r)=\int_{C(r)}\frac{\overline{z}+1}{z+1}\,dz$$

と定義する. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $0<r<1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(2) $r > 1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(京都大 22)　　(固有番号 m223307)

15.20 複素関数

$$g(z) = \frac{1}{e^{iz} - 1}$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) $g(z)$ の全ての極とその位数, 及び留数を求めよ.

(2) 適切に正の実数 a を選ぶと, $g(z)$ は $0 < |z| < a$ において

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n \ , \qquad c_n \in \mathbb{C} \qquad (n = m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots) \ , \qquad c_m \neq 0 \ , \qquad m \in \mathbb{Z}$$

の形にローラン展開できる. このような実数 a のうち, 最大のものを求めよ.

(3) (2) における整数 m と, 係数 $c_m,\ c_{m+1},\ c_{m+2}$ を求めよ.

(4) 次の積分を求めよ. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする.

$$\int_{|z|=100} g(z)\, dz$$

(京都大 22)　　(固有番号 m223308)

15.21 次の問いに答えよ. ただし, z, ω は複素数とし, i は虚数単位とする.

(1) $|5z - i| = |3z - 7i|$ なる方程式を満足する z を複素平面上で図示し, どのような図形となるか答えよ.

(2) z に対し,

$$w = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}z - 1}{2z + 2\sqrt{3}}$$

なる変数変換を行った場合, w が満たす方程式を複素平面上に図示せよ.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223504)

15.22 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi i k t} f(t)\, dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0, 1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(\theta-t))+r^2}\,dt$$

となることを示せ.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223509)

15.23 n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.
すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 $f,\ g$ を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{2\pi inx}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_n e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開する.

(1) $p(x) = f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2) $q(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\,ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223510)

15.24 実数を成分に持つ, 対称かつ正定値な n 次正方行列を B とする. その (i,j) 成分を B_{ij} と書くことにする. n 次元実ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ と表し, その内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i$ と定める（^{t} は転置を表す）. 行列 B の行列式を $\det B$, 逆行列を B^{-1} と表すことにする.

(1) 任意の実数 s と $b > 0$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ts}e^{-\frac{t^2}{2b}}\,dt = e^{\frac{bs^2}{2}}$$

(2) 任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n = e^{\frac{1}{2}(B\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$$

(3) $1 \leqq j, k \leqq n$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_jx_ke^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n = B_{jk}$$

(4) n 次正方行列 A に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n = \mathrm{Tr}(AB)$$

ここで, $\mathrm{Tr}(AB)$ は行列 AB の対角成分の和を表す.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223511)

15.25 次の条件を満たす点 $z = x + iy$ の存在範囲を図示せよ.

$\boldsymbol{Re}\left(z^2\right) < 1$

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223608)

15.26 留数解析を用いて, 次の積分値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$$

(大阪府立大 22)　　(固有番号 m223609)

15.27 次の各問に答えよ. ただし, i を虚数単位とする.

(1) 複素数 $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表せ. ただし, $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(2) 複素数

$$\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$$

を計算せよ. ただし, $x + iy$（x, y は実数）という形で答えよ.

(宮崎大 22)　　(固有番号 m225302)

15.28 ベクトル $\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{b}$ と直交し, $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 4$ とする. このとき, $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$ を求めよ.

(鹿児島大 22)　　(固有番号 m225404)

15.29 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ および $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ に対し, $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ との外積 $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a}$ を計算せよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は, それぞれ直交座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルである.

(島根大 22)　　(固有番号 m225804)

15.30 周期 X の周期関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\ |x| \leqq d/2\ ) \\ 0 & (\ d/2 < |x| \leqq X/2) \end{cases}$$

について次の問いに答えなさい. ただし, $0 < d < X$ である.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\alpha}{n}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi\alpha}{2n-1}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(和歌山大 22)　　(固有番号 m226504)

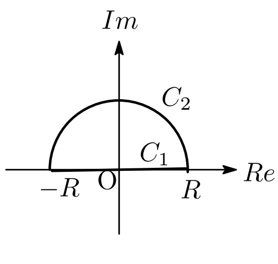
15.31 R を 1 より大きい実数として, 図のように複素平面上で線分 C_1 と上半円周 C_2 からなる曲線 $C = C_1 + C_2$ が与えられている. ただし, 曲線 C の向きは反時計まわりとする.

複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) C_2 上で $|f(z)| \leqq \dfrac{1}{R^2-1}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めなさい.



(和歌山大 22)　　(固有番号 m226505)

確率統計

16　確率統計

16.1　(1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1+n_2+n_3=N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を計算することを考える.

(a) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e N = 0$ となることを示せ.

(b) $N\to\infty$ $\left(N=\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち $p_i = \displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N}$ $(i=1,2,\cdots m)$. このとき, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log_e W$ を p_i のみで表せ.

ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k+1/12k}$$

(東京大 22)　　(固有番号 m220705)

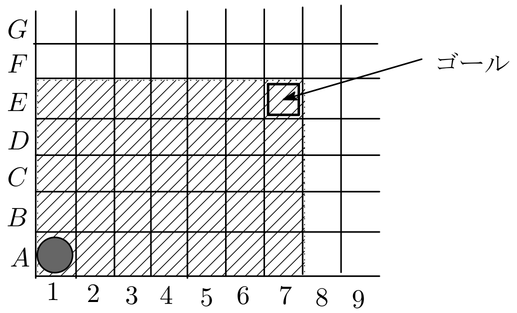
16.2　送られてきた, 100 個のある機械は, その内 10 個が壊れていることが分かっている. この中からランダムに連続して 2 個取り出すとき, 2 個とも壊れている確率を求めよ.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221317)

16.3　ある大学の入学試験では 4 問出題され, 3 問以上の正解が合格ラインである. この大学の入試と同程度の模試で平均して 4 問中 3 問正解している学生が合格する確率は何パーセントかを求めよ（分数による精緻解と小数点以下を四捨五入した数値解の 2 通りで答えよ）.

(筑波大 22)　　(固有番号 m221318)

16.4　下図のような碁盤の左下のます目に碁石を置き実験を始める. サイコロを振って, 偶数が出れば右へ 1 ます, 奇数が出れば上へ 1 ます進めることを繰り返す.



(1) サイコロを 10 回投げることにする. 実験終了後に, ちょうど右上の「ゴール」と書いたます目に碁石がある確率はいくつか.

(2) サイコロを 8 回投げることにする. ; 実験終了後に, 図の網掛けをしていない領域（左下が $A1$, 右上が $E7$ の 35 個のます目以外）に碁石がある確率はいくつか.

(群馬大 22)　　(固有番号 m221503)

16.5 大小 2 つのサイコロを投げて出た目をそれぞれ a, b とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ を作る. 以下の問いに答えなさい.

(1) A が対称行列になる確率を求めなさい.

(2) A が正則行列になる確率を求めなさい.

(3) 行列式 $|A|$ の期待値を求めなさい.

(長岡技科大 22)　　(固有番号 m222101)

16.6 赤い玉, 白い玉, 青い玉を不透明な袋の中に入れる. 以下の問いを読んで, 既約分数で答えよ.

(1) 袋の中に赤い玉 3 個, 白い玉 5 個, 青い玉 8 個が入っている.

(a) 袋の中から玉を 1 個取り出し, 色を確認してから袋に戻す. 袋の中をよくかき混ぜてから, 改めて玉を 1 個取り出したとき, 取り出された玉が最初に取り出した玉と同じ色である確率を答えよ.

(b) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が赤 1 個と白 1 個である確率を答えよ.

(c) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が異なる色である確率を答えよ.

(2) 袋の中に赤い玉 $3n$ 個, 白い玉 $5n$ 個, 青い玉 $8n$ 個が入っている（n は自然数）. この袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が同じ色である確率を $p(n)$ と表すことにする. $\lim_{n\to\infty} p(n)$ を答えよ.

(豊橋技科大 22)　　(固有番号 m222701)

16.7 以下の問いに答えよ. 答えは既約分数で示せ.

(1) 4 人でジャンケンをする. それぞれが, グー, チョキ, パーを出す確率は等しいものとする. 1 回ののジャンケンで勝者 1 人が決まる確率を求めよ.

(2) つぼの中に白い玉 5 個と黒い玉 5 個が入っている. このつぼから無作為に一度に 4 個の玉を取り出したとき, 取り出した白い玉と取り出した黒い玉の個数がちがう確率を求めよ.

(3) つぼの中に玉が 4 個入っており, そのうち白い玉が何個であるかは分からないとする. このつぼから玉を 1 個取り出したところ, 白い玉であったという. もともとつぼの中に白い玉が 3 個入っていた確率を求めよ.

(豊橋技科大 23)　　(固有番号 m232701)

16.8 確率密度 X の確率密度関数が $f(x)$ で与えられているとき, 積率母関数 $M_X(t)$ を $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$ で定義する.　また, 2 つの関数 $p(x)$, $q(x)$ の合成積 $p * q(x)$ を $p * q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u)q(x-u)du$ で定義する. 以下の (1)〜(3) に答えよ. ただし, 計算に必要となる確率密度関数の積分に関する仮定は適宜用いてよい.

(1) 確率変数 X, Y は互いに独立で, 同時確率密度関数が $f(x)g(y)$ で与えられているとする. このとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の確率密度関数 $h(z)$ が $h(z) = f * g(z)$ で与えられることを示せ.

(2) 独立な確率変数 X, Y に対し, $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ がなりたつことを示せ.

(3) 確率変数 X の平均 m_X と分散 σ_X^2 は, それぞれ次のように与えられることを示せ.

$$m_X = \left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0} , \ \sigma_X^2 = \left.\frac{d^2M_X}{dt^2}\right|_{t=0} - \left(\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\right)^2$$

(京都大 22)　　(固有番号 m223303)

16.9 部品 A および部品 B 一つずつで構成される製品を製造する工場がある. 部品 A は確率 p $(0 < p < 1)$ で不良品であり, 部品 B は確率 q $(0 < q < 1)$ で不良品である. 部品 A および部品 B が不良品であるかどうかは独立である. また, 不良品は工場から出荷できないものとする. 工場で n 個の製品を製造したとする. 以下の設問に答えよ. なお, 必ず導出の過程を示すこと.

(1) n 個すべての製品を出荷できる確率を求めよ.

(2) n 個のうち m 個の製品を出荷できる確率 $P(m)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} P(m)$ を求めよ.

(4) 出荷できる製品の個数の期待値 E を求めよ.

(5) $n = 1000$, $p = 0.01$, $q = 0.02$ として, 確率 $P(m)$ を最大化する m を求めよ.

(大阪大 22)　　(固有番号 m223507)

16.10 サイコロを 5 回続けて投げる. k 回目に出る目の数を X_k とする. 出た目の和を Y とし, 出た目の積を Z とする. つまり, $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ で, $Z = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5$ とする.

(1) $Y = 5$ である確率を求めよ.

(2) $Y = 6$ である確率を求めよ.

(3) $Y = 7$ である確率を求めよ.

(4) Z が 3 の倍数になる確率を求めよ.

(5) サイコロが 5 回とも同じ目の時には 10000 点もらえ, サイコロが 4 回は同じ目で残りがそれとは違う目の時には 1000 点もらえ, 3 回は同じ目で残りがそれとは違う目の時には 100 点もらえる. それ以外の場合はもらえないとする. この時もらえる点数の期待値 E を求めよ. また E の小数第 1 位を四捨五入した値も求めよ.

(九州大 22)　　(固有番号 m224704)

16.11 出る目の確率分布が次の表で与えられるサイコロがある.

出る目	1	2	3	4	5	6	計
確　率	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1

次の問いに答えよ.

(1) このサイコロを 1 回投げたときの出る目の期待値と分散を求めなさい.

(2) このサイコロを 2 回投げたとき, 出る目の積が 6 になる場合の確率を求めなさい.

(3) このサイコロを 3 回投げたとき, 出る目がすべて異なる場合の確率を求めなさい.

(和歌山大 22)　　(固有番号 m226502)