

大学編入学試験問題集（数学）

《類題作成 碓氷軽井沢 IC 数学教育研究所》

2013年3月

目次		線形代数	40
基礎数学	2	8 ベクトル	40
1 基礎数学	2	9 行列	43
微分積分 I	4	10 行列式	47
2 微分	4	11 連立方程式	51
3 積分	10	12 線形変換	52
微分積分 II	19	13 固有値とその応用	54
4 級数	19	14 線形空間など	66
5 偏微分	23	応用数学	70
6 重積分	26	15 応用数学	70
7 微分方程式	32	確率統計	77
		16 確率統計	77

基礎数学

1 基礎数学

1.1 次の式が成立する自然数 n の値を求めなさい.

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2$$

(筑波大類 24) (固有番号 s241321)

1.2 (1) s と t は実数とする. $x + y = s$, $xy = t$ という関係式が成立するとき, x と y が実数となるための条件を, s と t を用いて表しなさい.

(2) 実数 x, y が $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ を満たして変化するとき, 点 $(x + y, xy)$ の示す領域を求め, 図示しなさい.

(筑波大類 24) (固有番号 s241322)

1.3 自然数 n について, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, \dots , $a_n > 0$ とする. このとき, 次の (1) から (3) の示す不等式が成立することを証明しなさい.

(1) $0 < a_1 \leq 1$ かつ $a_2 \geq 1$ ならば $a_1 + a_2 \geq a_1 a_2 + 1$

(2) $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1$ ならば $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$

(3) $\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$

(筑波大類 24) (固有番号 s241323)

1.4 \mathbb{R} の部分集合 A の上限, 下限をそれぞれ $\sup A$, $\inf A$ で表す. このとき, 以下を示せ.

(1) $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界でかつ空でないとする,

$$\sup A = -\inf(-A)$$

が成り立つ. ただし, $-A = \{-a \mid a \in A\}$ とする.

(2) $A, B \subset \mathbb{R}$ がともに上に有界でかつ空でないとする,

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

が成り立つ. ただし, $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ とする.

(3) $A, B \subset [0, \infty)$ がともに上に有界でかつ空でないとする,

$$\sup AB = (\sup A)(\sup B)$$

が成り立つ. ただし, $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ とする.

(筑波大類 24) (固有番号 s241328)

1.5 以下の 3 つの問いに答えよ.

(1) 点 $A(-6, 8)$ を中心とし, 原点を通る円の方程式を求めよ.

(2) 2点 $B(-4, 6)$ と $C(12, -6)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ.

(3) 3点 $D(0, -1)$, $E(2, 1)$, $F(1, -1 - \sqrt{3})$ を通る円の方程式を求めよ.

(群馬大類 24) (固有番号 s241501)

1.6 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として, 以下の 3 つの問いに答えよ.

- (1) 20^{19} の桁数を求めよ.
- (2) 12^{16} の桁数を求めよ.
- (3) 5^{32} の桁数とその最初の数字 (首位の数字) を求めよ.

(群馬大類 24) (固有番号 s241502)

1.7 以下の 2 つの問いに答えよ.

- (1) x の 3 次式 $12x^3 + 6x^2 + 20x + 10$ があるとき, ある整式 A で割ったところ, 商 $3x^2 + 5$, 余り 0 であった. 整式 A を求めよ.
- (2) x の 5 次式 $4x^5 + 14x^4 + 11x^2 - 3x - 5$ があるとき, ある整式 B で割ったところ, 商 $2x^2 + 3$, 余り $6x + 10$ であった. 整式 B を求めよ.

(群馬大類 24) (固有番号 s241503)

1.8 x - y 平面上の曲線 $y = ax^2 + 1$ と直線 $y = x$ が接するとき, a の値と接点の座標を求めよ.

(新潟大類 24) (固有番号 s242003)

1.9 $d(x, y)$ を空でない集合 X 上の距離とし, $x, y \in X$ に対して $\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ とする.

- (1) ρ は X 上の有界な距離であることを示せ.
- (2) 距離 d が有界であることが ρ と d が同等となるための必要十分条件であることを示せ. ただし, 同等とは任意の $x, y \in X$ に対して $Ad(x, y) \leq \rho(x, y) \leq Bd(x, y)$ となる正定数 A, B が存在することである.

(富山大類 24) (固有番号 s242308)

1.10 2 次方程式 $2x^2 - 5x - 6 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき, 次の値を求めよ.

- (1) $\alpha^2 + \beta^2$
- (2) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

(福井大類 24) (固有番号 s242401)

1.11 次式を因数分解せよ.

- (1) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x^2y^2 + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{6}xy$
- (2) $b^2 + c^2 + b(a - c) - c(a + b)$

(福井大類 24) (固有番号 s242402)

1.12 次の値を求めよ.

- (1) $\frac{a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}} \left(b^{-\frac{3}{2}}\sqrt{a^2b} \right)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{-2}}$, ただし, a, b は正の数とする.

- (2) $\log_5 \sqrt[8]{5}$

- (3) $\frac{\log_5 8 \cdot \log_3 6 \cdot \log_2 3}{\log_5 3 + \log_5 2}$

(福井大類 24) (固有番号 s242414)

1.13 次の方程式を解け.

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$$

(福井大類 24) (固有番号 s242415)

1.14 次の関数の最大値及び最小値を求めよ.

$$\cos 2x + \sin x$$

(福井大類 24) (固有番号 s242416)

1.15 x, y 平面上についての以下の設問に答えよ.

- (1) $|x| + |y| = 1$ のグラフを描け.
- (2) $|x + y| + |x - y| = 1$ のグラフを描け.
- (3) 実数 x, y が (2) の等式を満たすとき, $|x| + |y|$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(三重大類 24) (固有番号 s243114)

1.16 (1) 2 以上 17 以下のすべての素数 n に対して, $n^2 + 2$ の値を求めよ.

(2) 2 以上の自然数 n で, n と $n^2 + 2$ がともに素数になるものをすべて求めよ.

(京成大類 24) (固有番号 s243301)

1.17 ある集合 X の部分集合 A, B, C について, 次のことを証明せよ. 対称差 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ がともに有限集合であるならば, $A \Delta C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ も有限集合である. (ただし, $A \setminus B$ は A の元で B に含まれないもの全体を表す.)

(神戸大類 24) (固有番号 s243807)

微分積分 I

2 微分

2.1 関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(北見工業大類 24) (固有番号 s240201)

2.2 関数 $y = |x^3 - 3x|$ の増減をしらべ, 極値を求め, かつ, グラフの概形を描け.

(北見工業大類 24) (固有番号 s240205)

2.3 関数 $f(x) = xe^x$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 増減と極値を調べなさい.
- (2) グラフの凹凸と変曲点を調べなさい.
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求めなさい.
- (4) グラフの概形をかきなさい.

(秋田大類 24) (固有番号 s240403)

2.4 数列

$$a_n = \frac{-n^2 + 3n - 1}{n^2 + 1} \quad (\text{ただし } n = 1, 2, \dots)$$

について, その最大値, 最小値および $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(東北大類 24) (固有番号 s240508)

2.5 極座標表示で

$$r^2 = \cos 2\theta \quad \text{ただし} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

と表される曲線の概形を描け.

(お茶の水女子大類 24) (固有番号 s240606)

2.6 次の極限值を求めなさい.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$

(千葉大類 24) (固有番号 s241201)

2.7 実関数

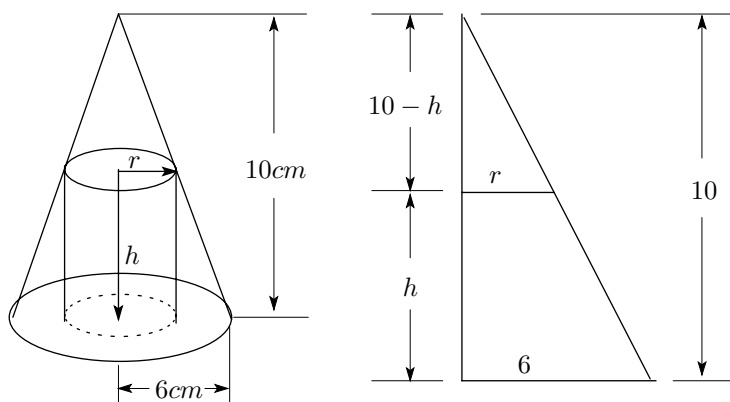
$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 逆関数が存在することを示せ.
- (2) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ. 導出過程も示せ.
- (3) 逆関数 $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ. 導出過程も示せ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241303)

2.8 下図のように半径 6cm , 高さ 10cm の円錐の中に内接する円柱がある. この円柱の体積が最大になるときの半径 r と高さ h を求めよ.



(筑波大類 24) (固有番号 s241306)

- 2.9 (1) 関数 $y = \sin^2 x$ のグラフを (x, y) 平面上に描きなさい.
- (2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とは何か. 定義を述べなさい.
- (3) ある畑の面積は $0.5ha$ である. この面積を km^2 の単位で表しなさい.

(筑波大類 24) (固有番号 s241313)

2.10 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \cos(\sin x)$

(2) $y = x^{\sin^{-1} x} \quad (0 < x < 1)$

(埼玉大類 24) (固有番号 s241401)

2.11 次の関数を微分せよ. ただし, \log は自然対数で表す.

(1) $\tan(x^2 - 3x)$

(2) $x^2 \log x$

(3) $x^3(x^2 + 5x + 1)^{-1}$

(新潟大類 24) (固有番号 s242001)

2.12 次の計算をせよ.

(1) $\frac{d}{dx}(1-x^2)e^{(a(x-b))^2}$ (a, b は定数である)

(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}\right)$ ($x \neq 1$)

(富山大類 24) (固有番号 s242301)

2.13 次の公式を使って極限值を求めよ.

公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+2x)}{x}$

(福井大類 24) (固有番号 s242403)

2.14 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \left(\frac{\log_e x}{x}\right)^5$

(2) $y = x^x$

(福井大類 24) (固有番号 s242404)

2.15 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sqrt{4 \sin x + 6}$

(2) $y = \log \sqrt[5]{\frac{x+5}{x-5}}$

(3) $y = -\tan^5 x$

(4) $y = \sin^5 x + \cos^5 x$

(福井大類 24) (固有番号 s242417)

2.16 次の関数を微分せよ.

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} \quad (x \neq n\pi, n \text{ は整数})$$

(豊橋技科大類 24) (固有番号 s242704)

2.17 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 3x)}{2x(3-x)}$$

(豊橋技科大類 25) (固有番号 s252701)

2.18 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)$ を求めよ.

(名古屋工業大類 24) (固有番号 s242906)

2.19 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

(2) $y = (x+1)(x+2)(x+3)$

(3) $y = \sin \sqrt{x^2 + x + 1}$

(4) $\log \frac{1+x}{1-x}$

(5) $y = \log_a(x^2 - 1)$ ($a > 0, a \neq 1$)

(三重大類 24) (固有番号 s243111)

2.20 地上から角度 α の方向に初速度 v_0 で投げ上げた物体の t 秒後の位置は、投げ上げた地点を原点にとり、物体の運動する曲線を含む平面上で、地面上に x 軸、鉛直方向に y 軸をとると、

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

で与えられる。この時の以下の設問に答えよ。ただし、 g は重力の加速度である。

- (1) この物体は、どのような曲線を描いて運動するか、軌跡の式を示して説明せよ。
- (2) この物体が最高点に達した時点と地面に着いた時点について、両者の速度と方向を求め、両者の関係を説明せよ。

(三重大類 24) (固有番号 s243115)

2.21 以下の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{3x-2}{x^2+1}$$

$$(2) y = \sqrt{2x^2-3}$$

$$(3) y = e^x \sin x$$

$$(4) y = \frac{1}{\tan x}$$

$$(5) y = \log(x^2+1)$$

(三重大類 24) (固有番号 s243116)

2.22 以下の関数を微分せよ。ただし、 a, b, c は実定数である。

$$(1) y = \cos(ax^2 + bx + c)$$

$$(2) y = \frac{\exp(-ax)}{x^2}$$

(奈良女子大類 24) (固有番号 s243201)

2.23 関数 $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ に対して、次の問に答えよ。

- (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ。

(奈良女子大類 24) (固有番号 s243207)

2.24 関数 $f(x), f_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) を、閉区間 $[a, b]$ 上で微分可能であり、それらの導関数は $[a, b]$ 上で連続とし、

$$(i) \text{すべての } n \text{ について } f_n(a) = f(a),$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f'_n(x) - f'(x)| dx = 0,$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を $f(a)$ と $f'(x)$ を使って表せ。
- (2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することを示せ。
- (3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ。

(岡山大類 24) (固有番号 s244001)

2.25 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-x}$ を計算せよ。

(広島大類 24) (固有番号 s244107)

2.26 次の関数を x で微分せよ。ただし、 a は正の定数である。

$$(1) e^{-ax^2}$$

$$(2) a^x \quad (a \neq 1)$$

(広島大類 24) (固有番号 s244109)

2.27 極座標 (r, θ) で表示して $r = 1 + \cos \theta$ で表わされる曲線を考える. 極座標で $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ と表わせるこの曲線上の点 A での接線の方程式を求めよ.

(広島市立大類 24) (固有番号 s244203)

2.28 曲線 $y = x^3 + kx + 1$ を C とする (k を実数とする).

点 $P(1, 0)$ を通る曲線 C の接線が 3 本存在する時の k の範囲を求めよ.

(山口大類 24) (固有番号 s244303)

2.29 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x^2 - \pi^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - e^{-x})}{\sin x - x \cos x}$

(徳島大類 24) (固有番号 s244406)

2.30 実数直線 \mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示せ.
- (2) $x \neq 0$ のとき, $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることを示せ. また, $f'(0)$ を求めよ.
- (4) $f'(x)$ が $x = 0$ で連続でないことを示せ.

(高知大類 24) (固有番号 s244501)

2.31 関数 $f(x) = \sin(\log x)$ ($x > 0$) を考える. $f'(x)$, $f''(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の 1 次および 2 次の導関数とする. また, π は円周率, e は自然対数の底とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $1 < x < e^\pi$ において $f'(x) = 0$ となる x を求めよ.
- (2) $1 < x < e^\pi$ において $f''(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.
- (3) 2 点 $(1, f(1))$, $(e^{\pi/2}, f(e^{\pi/2}))$ を通る直線の方程式を求めよ.
- (4) $\frac{e^{\pi/4} - 1}{e^{\pi/2} - 1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ.

(九州大類 24) (固有番号 s244705)

2.32 次の関数 y の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y = x^2 + \sqrt{x}$

(2) $y = e^{2x^2}$

(3) $y = \sin(3x) \cos x$

(4) $y = x \log x$

(佐賀大類 24) (固有番号 s244907)

2.33 次の関数 y について答えなさい. ただし, a および b は正の定数である.

$$y = 4a \left\{ \left(\frac{b}{x}\right)^{12} - \left(\frac{b}{x}\right)^6 \right\}$$

- (1) $y = 0$ となる時の x の値を求めなさい.

(2) $y < 0$ となるときの x の値の範囲を求めなさい.

(3) 関数 y が極値をとるときの x を求めなさい.

(佐賀大類 24) (固有番号 s244909)

2.34 次の関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を計算せよ.

(1) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x + 1}$

(2) $f(x) = e^{\sin x} \cos(2x)$

(佐賀大類 24) (固有番号 s244911)

2.35 次の微分を計算し、簡単な式で表せ.

(1) $\frac{d}{dx} \{ \sin(x^3) \}$

(2) $\frac{d}{dx} (\log x \cdot \cos x)$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245401)

2.36 次の微分を計算し、簡単な式で表せ.

(1) $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{e^{2x}}{2} \log(x^2 + 1) \right\}$

(2) $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\cos^2 x}{(2x + 1)^2} \right\}$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245406)

2.37 次の微分を求めなさい.

(1) $\frac{d}{dx} (e^{-x^2} \log x)$ (ただし、対数は自然対数とする.)

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245411)

2.38 次の微分を求めなさい.

$\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2} \right)$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245416)

2.39 以下の問題に答えなさい.

(1) $(x^2 + 1)^2$ を微分しなさい.

(2) 関数 $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ の最大値、最小値、そのときの x の値を求めなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245421)

2.40 関数 $y = \frac{1}{1 + e^{-ax}}$ について以下の設問に答えなさい. ただし、 a は正の定数とする.

(1) y の値域を求めなさい.

(2) 逆関数 y^{-1} を求めなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245430)

2.41 次の関数 y を x で微分し、三角関数 1 つを用いた式に整理しなさい.

$y = \cos^2 x - \sin^2 x$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245432)

2.42 関数 $y = x^x$ を x で微分しなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245434)

2.43 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ を求めなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245435)

2.44 以下の各設問に答えよ。ただし、 x は実数とする。

(1) 関数 $f(x), g(x)$ を $f(x) = x - \tan^{-1} x, g(x) = x - x \sin x$ と定義する。以下の問いに答えよ。

(a) 導関数 $f'(x)$, 第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(b) 導関数 $g'(x)$, 第2次導関数 $g''(x)$ を求めよ。

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ。

(2) 関数 $y(x)$ を $y(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ と定義する。以下の問いに答えよ。

(a) 導関数 $y'(x)$, 第2次導関数 $y''(x)$ を求めよ。

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ であることを示せ。

(c) $y'(x)$, および $y''(x)$ の符号を用いて、関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ。また、関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ。

(島根大類 24) (固有番号 s245801)

2.45 次の関数を微分しなさい。

(1) $f(x) = (2x - x^2)^6$

(2) $f(x) = \sin^{-1} x^2$

(首都大類 24) (固有番号 s245904)

2.46 逆三角関数に関する次の方程式を解け。

$$\cos^{-1} x = 2 \sin^{-1} \frac{3}{5}$$

(滋賀県立大類 24) (固有番号 s246001)

2.47 関数 $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) について、以下の問いに答えよ。

(1) n を固定するとき、 $f_n(x)$ の閉区間 $[0, 1]$ での最大値を M_n 、それを与える x の値を x_n とする。このとき、 M_n と x_n をそれぞれ n で表せ。

(2) (1) の M_n と x_n に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ をそれぞれ求めよ。

(はこだて未来大類 24) (固有番号 s246304)

2.48 次の関数を微分しなさい。

(1) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

(2) $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$

(3) $f(x) = (x^2 + \sqrt{x} + 1)^{\frac{3}{2}}$

(4) $f(x) = \log_e(x^3 + x + 1)$

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246407)

2.49 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{2(1 - \cos x)}$ の値を求めなさい。

(和歌山大類 24) (固有番号 s246504)

3 積分

3.1 不定積分 $\int \frac{1}{x(x-1)} dx$ を求めよ。

(北見工業大類 24) (固有番号 s240203)

3.2 定積分 $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$ を求めよ。

(北見工業大類 24) (固有番号 s240204)

3.3 点 $P(0, -1)$ を通る直線と曲線 $C : y = -x^2 + 2x$ が 2 点 Q, R で交わるとき、以下の問いに答えよ。ただし、点 Q の x 座標を a として、 $0 < a < 2$ とする。

- (1) 点 Q, R それぞれにおける曲線 C の接線 l_Q, l_R の方程式を求めよ。
- (2) (1) で求めた接線 l_Q, l_R の交点の軌跡を求めよ。
- (3) (2) の交点が第 1 象限にあるとき、 y 軸、曲線 C 、接線 l_Q および (2) で求めた軌跡で囲まれた領域を図示し、この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求める積分の式を示せ。

(東北大類 24) (固有番号 s240503)

3.4 z を正の実数とする。実変数の関数 $f(x)$ に対し、広義積分 $\int_0^{\infty} e^{-xz} f(x) dx$ が存在するとき、これを $I[f](z)$ と書くことにする。

- (1) f が区間 $[0, \infty)$ で連続かつ有界であれば、 $I[f](z)$ が存在することを示せ。
- (2) a を実数とする。 $I[\sin ax](z), I[\cos ax](z)$ をそれぞれ求めよ。

(東北大類 24) (固有番号 s240509)

3.5 以下の各問いに答えよ。

- (1) 次の実数値関数の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{x^4}{x^3 - 1} dx$$

- (2) \mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ が、異なる 2 点 a, b を含む区間で連続であれば

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$$

となるような点 ξ が 2 点 a, b の間に必ず存在することを示せ。

(お茶の水女子大類 24) (固有番号 s240601)

3.6 $t > 0$ に対して、

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) 右辺の広義積分は収束することを示せ。
- (2) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ であることを示せ。
- (3) 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを示せ。

(お茶の水女子大類 24) (固有番号 s240605)

3.7 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

が収束するような実数 α の値の範囲を求めよ。

(筑波大類 24) (固有番号 s241326)

3.8 次の定積分を求めなさい。

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx$$

(筑波大類 24) (固有番号 s241329)

3.9 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx \quad (m, n \text{ は自然数})$$

(埼玉大類 24) (固有番号 s241402)

3.10 (1) 定積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$ の値を求めなさい.

(2) 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を求めなさい.

(山梨大類 24) (固有番号 s241801)

3.11 (1) $|x| \leq \frac{1}{2}$ ならば, $|\log(1+x) - x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ.

(2) 次の等式を証明せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{n} \cos \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 \cos x \, dx$$

(信州大類 24) (固有番号 s241903)

3.12 次の関数 $f(x)$ が $x = 0$ において微分可能であるとき以下の問に答えよ. ただし, e は自然対数の底であり, a, b は定数とする.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & (x < 0 \text{ のとき}) \\ (ax + b)e^{-x} & (x \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) 定数 a, b を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ, 曲線 $y = f(x)$ の概形を描け.

(3) 定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ の値を求めよ.

(新潟大類 24) (固有番号 s242009)

3.13 座標平面において, 曲線 $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で囲まれた図形を F とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) F の概形をかけ.

(2) 媒介変数表示 $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて, F の面積を求めよ.

(3) 媒介変数表示 $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて, F の周りの長さを求めよ.

(新潟大類 24) (固有番号 s242016)

3.14 xy 平面内の図形に関する, 次の問いに答えよ.

(1) $y = x^3$ 上の点 $P(t, t^3)$ から, $y = x$ へ下ろした垂線の足を Q とする. 点 Q の座標を, t を用いて表せ.

(2) 原点 O から点 Q までの距離を s とする. $t > 0$ のとき, s を t の式として表せ.

(3) 点 P から点 Q までの距離を, (2) の s を変数として $f(s)$ と表すとする. $y = x$ と $y = x^3$ が $x > 0$ の条件の下で囲む図形を, $y = x$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を, s に関する積分として $f(s)$ を用いて表せ.

(4) $V = \frac{4\sqrt{2}}{105} \pi$ を示せ.

(金沢大類 24) (固有番号 s242207)

3.15 次の計算をせよ.

(1) $\int \sin^5(2x)dx$ (2) $\int \log(3x-1)dx$ ($3x > 1$)

(富山大類 24) (固有番号 s242302)

3.16 懸垂曲線 $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ($a > 0$) と直線 $y = b$ ($b > a$) で囲まれた図形を考える.

- (1) 直線と懸垂曲線は $x = \pm \ell$ で交差する. 逆双曲線関数を用いて, 定数 a と b で ℓ を表せ.
 (2) 曲線の長さは曲線の線素 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ を積分することによって与えられる. この図形の周囲の長さを a と b を用いて表せ.

双曲線関数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 逆双曲線関数 $\cosh^{-1}x = \pm \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x > 1$), $\sinh^{-1}x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ を用いても良い.

(富山大類 24) (固有番号 s242305)

3.17 不定積分を求めよ.

$$\int \log_e x dx$$

(福井大類 24) (固有番号 s242405)

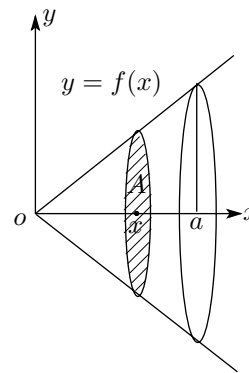
3.18 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a \geq 0)$$

(福井大類 24) (固有番号 s242406)

3.19 関数 $y = f(x) = \frac{1}{4}x$ がある. この関数が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体(回転体)の体積を, 次の問いにしたがって求めよ.

- (1) 関数 $f(x)$ が x 軸のまわりに回転するとき, $x = x$ で生じる回転体の底面積 A を求めよ.



- (2) 関数 $f(x)$ が $0 \leq x \leq a$ において x 軸のまわりに回転するとき生じる立体の体積 V を求めよ. 体積 V は (1) で求めた面積 A を $0 \leq x \leq a$ の範囲で積分することで求めることができる. なお, 円錐の体積を求める公式を使ってはいけない.

(福井大類 24) (固有番号 s242407)

3.20 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $8x^3 - 6x^2 - 2 + 2e^{3x} + 4 \sin x$
 (2) $\cos x \sin^6 x$
 (3) $\frac{1}{5e^x + 1}$ (4) $\frac{6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$

(福井大類 24) (固有番号 s242418)

3.21 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{2x-9}{(x-2)(x+3)} dx$$

(2) 楕円 $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$ の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれた領域の面積 S を求めたい. 以下の問いに答えなさい.

- (a) 領域における x の最大値を答えよ.
(b) 面積 S を定積分を含む式で表せ.
(c) 面積 S を計算せよ.

(豊橋技科大類 24) (固有番号 s242705)

3.22 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^x \cos \pi x dx$$

(豊橋技科大類 25) (固有番号 s252702)

3.23 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

(名古屋工業大類 24) (固有番号 s242904)

3.24 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{9x-4}{(x-2)(x^2+3)} dx dy$$

(名古屋工業大類 25) (固有番号 s252901)

3.25 次の問いに答えよ.

(1) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ.

(2) 関数 $F(x)$ が $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \left(2 - \frac{1}{3t}\right) dt$, $x > 0$ によって定義される. このとき, $F(x)$ の増減範囲を調べ, 極値を求めよ.

(名古屋工業大類 25) (固有番号 s252907)

3.26 以下の (1) については不定積分を, (2) と (3) については積分の値を求めよ.

(1) $\int \frac{4x+1}{4x^2+2x+6} dx$

(2) $\int_0^{\infty} t^2 e^{-at} dt$

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(三重大類 24) (固有番号 s243102)

3.27 xy 平面上の曲線 $r = (1 + \cos \theta)$ の概形を描け. またこの曲線の全長を求めよ. ただし r は動径, θ は r が x 軸となす角で $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする.

(三重大類 24) (固有番号 s243110)

3.28 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}} dx \qquad \int x \cos^2 x dx$$

(三重大類 24) (固有番号 s243112)

3.29 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\int \sqrt{2x-3} dx$ (2) $\int x^2 \sin x dx$ (3) $\int (\log x)^2 dx$
(三重大類 24) (固有番号 s243117)

3.30 次の積分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(1) $\int_0^{\infty} \exp(-ax) dx$ ($a \neq 0$)
(2) $\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \sin(mx) \sin(nx) dx$ (m, n は正の整数)
(奈良女子大類 24) (固有番号 s243202)

3.31 xy 平面上の曲線

$$C : y = e^x + x$$

に対して, 次の問に答えよ.

- (1) 原点を通り曲線 C に接する直線 l を求めよ.
(2) 曲線 C , 直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.
(奈良女子大類 24) (固有番号 s243208)

3.32 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)
で与えられている. ここで, r は正の定数とする. このとき, 次の (1) ~ (3) に答えよ.

- (1) 曲線 C の長さ l を求めよ.
(2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ.
(3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して, P における C の法線と x 軸との交点を考え, その座標を $(a, 0)$ とする. P を動かすとき, P における C の接線と直線 $x = a$ との交点は, どのような図形を描くか.
(京都大類 24) (固有番号 s243303)

3.33 (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\cos x) \log(\cos x)$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) \log(\cos x) dx$ を求めよ.
(京都工芸繊維大類 24) (固有番号 s243403)

3.34 $|x| \neq 1$ なる実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^{\pi} \log(1 - 2x \cos t + x^2) dt$$

で関数 $f(x)$ を定義する. 次の各問いに答えよ.

- (1) $f(x) = f(-x)$ を示せ.
(2) $f(x) + f(-x) = f(x^2)$ を示せ.
(3) $x \neq 0$ のとき, $f(x) = 2\pi \log|x| + f(\frac{1}{x})$ を示せ.
(4) $|x| < 1$ のとき, $f(x)$ を求めよ.
(5) $|x| > 1$ のとき, $f(x)$ を求めよ.

(岡山大類 24) (固有番号 s244002)

3.35 以下の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\int_1^e \frac{1}{r\sqrt{\log r}} dr$ の値を求めよ.

(2) 広義積分 $\int_e^\infty \frac{1}{r(\log r)^2} dr$ の値を求めよ.

(広島大類 24) (固有番号 s244105)

3.36 次の積分を計算せよ.

(1) $\int \frac{x}{ax+b} dx$ (a, b はいずれも 0 でない定数)

(2) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(広島大類 24) (固有番号 s244110)

3.37 無限積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$ の収束発散を調べ, 収束する場合はその値を求めよ.

(広島市立大類 24) (固有番号 s244201)

3.38 曲線 $y = x^3 - 12x + 16$ を D とする. 曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(山口大類 24) (固有番号 s244304)

3.39 広義積分 $I = \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $t = x + \sqrt{x^2+1}$ おいたとき, x を t で表せ.

(2) (1) の変数変換により, I を t の積分に変換せよ.

(3) I の値を求めよ.

(徳島大類 24) (固有番号 s244403)

3.40 $f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) 実数 a に対して, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{e^x - e^a}$ を求めよ.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ.

(4) 任意の実数 x に対して, $|f(x)| \leq |x|$ を示せ.

(高知大類 24) (固有番号 s244502)

3.41 直角座標を (x, y) , 極座標を (r, θ) とするとき, 曲線 $C: r = 2(1 + \cos \theta)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸, y 軸との交点の直角座標を求めて, 曲線 C の概形を xy 平面上に描け.

(2) $r = 2(1 + \cos \theta)$, $y = 0$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$ で表される領域の面積を求めよ.

(3) 上の (2) で考えた領域の外周の長さを求めよ.

(九州大類 24) (固有番号 s244703)

3.42 関数 $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$ ($-\infty < x < \infty$) を考える. ただし, e は自然対数の底とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の値域を求めよ.

(2) 定積分 $I = \int_a^b f(x)dx$ の値を求めよ. ただし, $a = \frac{1}{4} \log 2$, $b = \frac{1}{4} \log 3$ とする.

(九州大類 24) (固有番号 s244706)

3.43 (1) $t = \sin^{-1} x$ とおいて, 置換積分法で不定積分 $\int \frac{1}{(\sin^{-1} x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_{1/2}^1 \frac{1}{(\sin^{-1} x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ.

(佐賀大類 24) (固有番号 s244902)

3.44 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\int \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx$

(2) $\int (\log x) dx$

(3) $\int \frac{1}{x-1} dx$

(4) $\int \frac{1}{(3-x)(3-2x)} dx$

(佐賀大類 24) (固有番号 s244908)

3.45 次の定積分を計算せよ.

(1) $\int_0^1 \frac{x^3 + x^2 - 1}{x+1} dx$

(2) $\int_0^1 e^{-x} \sin(\pi x) dx$

(佐賀大類 24) (固有番号 s244912)

3.46 次の不定積分を求めよ.

$$\int \sin(2x+1) dx$$

(大分大類 24) (固有番号 s245101)

3.47 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{2x} dx$$

(大分大類 24) (固有番号 s245104)

3.48 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int x \cos x dx$

(2) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245402)

3.49 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{x^2+2}{x^2-2} dx$

(2) $\int \cos^2 x dx$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245407)

3.50 次の不定積分を求めなさい.

$$\int x^2 \cos x dx$$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245412)

3.51 曲線 $y = x^3$ を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転面と, $y = 1$, $y = 8$ を通って y 軸に垂直な 2 平面とで囲まれた領域の体積を求めなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245415)

3.52 次の定積分を求めなさい.

$$\int_0^2 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx$$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245417)

3.53 曲線 $y = x^2$ と曲線 $x = y^2$ で囲まれる領域の面積を求めなさい。また、その領域を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を求めなさい。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245420)

3.54 以下の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y = \cos x$ ($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$) と x 軸で囲まれた面積を求めなさい。

(2) t の関数 $F(t) = \int_0^{10} z(x) \cos(t-x) dx$ の最大値が $\sqrt{\left\{ \int_0^{10} z(x) \cos x dx \right\}^2 + \left\{ \int_0^{10} z(x) \sin x dx \right\}^2}$ となることを示しなさい。ただし、 $z(x)$ は、 x に関する任意の関数である。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245422)

3.55 以下の問題に答えなさい。

(1) 加法定理 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ を用いて $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ が成立することを示しなさい。

(2) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ を、 $x = a \sin t$ とおくことにより計算しなさい。ただし、 $a > 0$ とする。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245426)

3.56 以下の問いに答えよ。

(1) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ を示せ。

(2) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ とおくと、 $n > 1$ に対して I_n と I_{n-2} の関係式を求めよ。

(香川大類 24) (固有番号 s245701)

3.57 次の問いに答えよ。ただし、 $\text{Arctan } x$ は $\tan x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$) の逆関数とする。

(1) $\text{Arctan } x$ の導関数と不定積分を求めよ。

(2) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$I(n) = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$$

とおくとき、 $I(n+1)$ を $I(n)$ を用いて表し、さらに $I(3)$ を計算せよ。

(3) $\int_0^1 x^5 \text{Arctan } x dx$ を計算せよ。

(4) $\int_0^1 x(\text{Arctan } x)^2 dx$ を計算せよ。

(島根大類 24) (固有番号 s245807)

3.58 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int x^2 \cos x dx$

(2) $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$

(首都大類 24) (固有番号 s245907)

3.59 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx$

(はこだて未来大類 24) (固有番号 s246303)

3.60 (1) 不定積分 $\int \frac{3x^2 - 4x - 3}{x^4 - 1} dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\log x}} dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246404)

3.61 次の関数の不定積分を求めなさい.

(1) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x}$

(2) $f(x) = x^3 \sin x$

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246408)

3.62 次の定積分を求めなさい.

(1) $\int_{-2}^2 (x^2 + 2x + 1)^2 dx$

(2) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246409)

3.63 次の曲線および直線で囲まれた部分の面積を求めなさい.

$y = \sqrt{x}, \quad x = 4, \quad y = 0$

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246410)

微分積分 II

4 級数

4.1 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する.

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

ここで e^x は指数関数を表す.

- (1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ.
- (2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ.
- (3) 次の関係式 (加法定理) を示せ.

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta$$

- (4) 上の関係式 (加法定理) から, 正弦関数 ($\sin \theta$) の加法定理を導け. ただし, 次のオイラーの関係式は仮定して良い.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(お茶の水女子大類 24) (固有番号 s240603)

4.2 方程式 $\sin x = 0$ の解は $x = m\pi(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$ であることから, 多項式

$$g_n(x) = Cx \left[\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \right] \left[\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \right] \cdots \left[\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \right]$$

は, 定数 C を適切に選べば $x = 0$ のまわりで $\sin x$ の良い近似であることがわかっている.

ここで, n は正の大きな整数である. この多項式と $x = 0$ のまわりでのべき級数展開

$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ を比較する. ここで, $a_k(k = 0, 1, 2, \dots)$ は定数である.

- (1) $\sin x$ のべき級数展開の 3 次の項まで, すなわち a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.
- (2) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたべき級数展開との 1 次の項の係数が一致するように C の値を決めよ
- (3) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたべき級数展開との 3 次の項の係数は $n \rightarrow \infty$ の極限で一致する.
このことを使って, 無限級数 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ の和 S を求めよ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241310)

4.3 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ (n は自然数) について以下の問いに答えよ.

(1) $\log(n+1) < S_n \leq 1 + \log n$ を示せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\log n} = 1$ を示せ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241319)

4.4 等比数列 $\{a_n\}$ が $a_3 = \frac{4}{3}$ および $a_5 = \frac{16}{27}$ であるとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

(新潟大類 24) (固有番号 s242004)

4.5 次の関数のマクローリン展開を計算し, 3 次の項まで示せ.

$$e^x + e^{-x}$$

(新潟大類 24) (固有番号 s242011)

4.6 次の各問いに答えよ.

(1) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ を示せ.

(2) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して, 次の級数の収束・発散を調べよ. 収束するときはその和も求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$$

(3) 次の関数の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3}$$

(4) 次の関数の極限值を求めよ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

(新潟大類 24) (固有番号 s242014)

4.7 関数 $f(x)$ が $f(0) = 0, f'(0) = 1$ および微分方程式

$$(1 - x^2)f''(x) = xf'(x) \quad (-1 < x < 1)$$

を満たしている. 次の問いに答えよ.

(1) $m = 1, 2, 3, \dots$ について

$$(1 - x^2)f^{(m+2)}(x) - 2mx f^{(m+1)}(x) - m(m-1)f^{(m)}(x) = xf^{(m+1)}(x) + mf^{(m)}(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $m = 2, 3, 4, \dots$ について

$$f^{(m)}(0) = (m-2)^2 f^{(m-2)}(0)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする.

(3) $f(x)$ は区間 $-1 < x < 1$ でマクローリン級数に展開できるとする. その級数が

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

となることを示せ. ただし, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n)$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)$ である.

(金沢大類 24) (固有番号 s242202)

4.8 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N \geq 3$ に対して,

$$\sum_{n=3}^N f(n) < \int_2^N f(x) dx$$

が成り立つことを示せ. ただし必要ならば, $e < 3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大類 24) (固有番号 s242206)

4.9 次の級数の収束に関する主張は正しいか; 正しいければ証明を与え, 正しくなければ反例をあげよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ が絶対収束する.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ が絶対収束する $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する.

(富山大類 24) (固有番号 s242309)

4.10 次式はマクローリン展開の一般式である.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{ただし, } f^{(n)} \text{ は } n \text{ 次導関数を示す.}$$

(1) $f(x) = e^x$ の $n = 4$ までのマクローリン展開を示すとともに, e の近似値を求めよ.

(2) $f(x) = \sin x$ および $f(x) = \cos x$ について, $n = 5$ までのマクローリン展開を示せ.

(3) 上の結果を利用して $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を示せ; ただし, $i^2 = -1$ である.

(福井大類 24) (固有番号 s242424)

4.11 次の関数 f のマクローリン (Maclaurin) 展開 $\left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ を求めよ.

(1) $f(x) = e^{x^2}$

(2) $f(x) = \log(2+x)$ ($-2 < x < 2$)

(静岡大類 24) (固有番号 s242504)

4.12 $f(x) = (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$ とする. $f(x)$ を $x = 0$ のまわりに Taylor 展開したときの x^3 までの項を求めよ.

(岐阜大類 24) (固有番号 s242601)

4.13 次の関数のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい.

$$f(x) = \log(1+x)$$

(三重大類 24) (固有番号 s243104)

4.14 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
によって定めるとき, 次の (1) ~ (3) に答えよ.

- (1) $n \geq 1$ であるすべての n に対して, $a_n > \sqrt{3}$ であることを証明せよ.
- (2) $n \geq 1$ であるすべての n に対して, $a_{n+1} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{3})$ であることを証明せよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$ であることを証明せよ.

(京都大類 24) (固有番号 s243302)

4.15 以下の間に答えよ.

- (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することを示せ.
- (2) m 桁の自然数のうちで, 0 の文字が入らないものの個数を答えよ. 例えば $m = 3$ のときなら, 111, 112, 113, \dots , 119, 121, \dots , 999 の個数で, 9^3 である.
- (3) (1) の和から n に 0 の文字が入った項, 例えば, $\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \dots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \dots$ などを抜いた級数を S とする. すなわち,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \dots$$

このとき, S は収束することを示せ.

(神戸大類 24) (固有番号 s243806)

4.16 以下の問いに答えよ.

- (1) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ.
- (2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.
- (3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$ を求めよ.
- (4) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大類 24) (固有番号 s244102)

4.17 $\sin ax$ のテーラー展開を x^5 の項まで求めよ. a は 0 でない実定数とする.

(広島大類 25) (固有番号 s254101)

4.18 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

と定義する.

- (1) $f(x)$ の 1 次から 4 次までの導関数 $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x)$ を求めなさい.
- (2) $f(x)$ の $x = 0$ における 1 次から 4 次までの微分係数 $f'(0), f''(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0)$ を求めなさい.

(3) $f(x)$ のマクローリン級数展開を 4 次の項まで求めなさい。

(大分大類 24) (固有番号 s245107)

4.19 次の各問に答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(1) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて、 $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ を導け。

(2) (1) の結果を用いて、以下の等式がすべての実数 θ に対して成立するように、定数 a と b を定めよ。

$$\sin^3 \theta = a \sin \theta + b \sin 3\theta$$

(宮崎大類 24) (固有番号 s245301)

4.20 x の n 次多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$ について、以下の問題に答えなさい。ただし、 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a$ は、定数とする。また、必要に応じて、階乗記号 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ を用いてよい。

(1) $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, 3 階導関数 $f'''(x)$, n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を計算しなさい。

(2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ が成立することを示しなさい。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245425)

4.21 関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ について以下の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい。

(2) (1) の結果を利用して $f(0.02)$ の近似値を求めなさい。

(首都大類 24) (固有番号 s245906)

4.22 $f(x) = x \sin x$ ($-\infty < x < \infty$) のマクローリン展開を 3 次の項まで求めなさい。

(和歌山大類 24) (固有番号 s246503)

5 偏微分

5.1 2 変数関数 $z = \arctan \frac{y}{x}$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ。(注: $(\arctan X)' = \frac{1}{1+X^2}$ である)

(北見工業大類 24) (固有番号 s240202)

5.2 関数 $f(x, y) = \log(x^2 + 2y^2)$ について、次の問いに答えなさい。

(1) 点 $(2, 1)$ における勾配ベクトルを求めなさい。

(2) 点 $(2, 1)$ におけるグラフの接平面の、点 $(3, 2)$ における z 座標と、接点の z 座標との差を求めなさい。

(秋田大類 24) (固有番号 s240404)

5.3 実変数 x, y の関数 $f(x, y) = x^3 - y^2$ について以下の問に答えよ。

(1) (x, y) が実平面全体をうごくととき、 $f(x, y)$ の臨界点 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ となる点} \right)$ をすべて求めよ。

(2) 各臨界点について、それが f の極値を与えるか調べよ。

- (3) 点 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 1$ の上をうごくとき、関数 $f(x, y)$ の最大、最小とそのときの x, y の値を求めよ。

(東北大類 24) (固有番号 s240507)

- 5.4 関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x-y}$ の極値を求めよ。

(東京工業大類 24) (固有番号 s240801)

- 5.5 関数 $f(x, y) = x^3 + x^2 + xy^2 - x - 2y^2$ の極値とそのときの点 (x, y) を求めなさい。

ただし、極値が極大値であるか極小値であるかを明記すること。

(東京農工大類 24) (固有番号 s240901)

- 5.6 全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して、極座標による変数変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\left[\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right] A$ を満たす行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を求めよ。

- (2) x, y の r, θ に関するヤコビアン (ヤコビの行列式) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算せよ。

- (3) $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$ を $r, \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ。

(電気通信大類 24) (固有番号 s241003)

- 5.7 次の関数の極値を求めよ。

$$f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 2x + 3y - 1$$

(筑波大類 24) (固有番号 s241305)

- 5.8 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{3(x+y)}{xy}$ の極値を求めよ。(ただし、 $x \neq 0, y \neq 0$.)

(筑波大類 24) (固有番号 s241318)

- 5.9 偏微分 $\frac{\partial^2 \sin^2(x^2y)}{\partial y \partial x}$ を求めなさい。

(山梨大類 24) (固有番号 s241802)

- 5.10 x, y が t に従属し、 $x^3 + y^2 = t, x^2 + 2y = t$ であるとき、 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ を x, y で表せ。

(新潟大類 24) (固有番号 s242005)

- 5.11 R^2 上の関数 $f(x, y) = xye^{-(x^2+2y^2)}$ の極値と、それを与える点を求めよ。

(金沢大類 24) (固有番号 s242208)

- 5.12 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

に対して、原点 $(0, 0)$ における 2 次の偏微分係数 $f_{xx}(0, 0), f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0), f_{yy}(0, 0)$ を求めよ。

(富山大類 24) (固有番号 s242310)

5.13 $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ の極値を求めよ.
(福井大類 24) (固有番号 s242408)

5.14 次で与えられる 2 変数関数 f に対し, 極大値と極小値があれば求めよ.

$$f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

(静岡大類 24) (固有番号 s242502)

5.15 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 - y^3 - xy$ について, 問 (1) と (2) に答えよ.

- (1) $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) を求めよ.
- (2) (1) で求めた点において極値の判定をせよ.

(名古屋工業大類 24) (固有番号 s242903)

5.16 関数 $f(x, y) = 4x^3 - 9xy^2 + 6y^3 - 12x$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x, y)$ の停留点 (すなわち $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ をみたす点) をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた停留点のそれぞれについて, 極値の判定をせよ.

(名古屋工業大類 25) (固有番号 s252903)

5.17 関数 $z(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 6x + 1$ の極値の値とその点の座標をすべて求めよ.

(三重大類 24) (固有番号 s243109)

5.18 関数 $F(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$ について次の問に答えよ.

- (1) xyz 空間の曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(1, 1, 5)$ における接平面の方程式を求めよ.
- (2) 微分可能な関数 $y = y(x)$ が $f(x, y(x)) = 5$ を満たすとき, 導関数 $y'(x)$ を x と $y(x)$ を用いて表せ.
- (3) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大類 24) (固有番号 s243402)

5.19 $f(u, v) = u^3 - 3uv^2$, $g(u, v) = 3u^2v - v^3$, $u = (e^y + e^{-y}) \cos x$, $v = (e^{-y} - e^y) \sin x$ のとき, 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$ を計算せよ.

(神戸大類 24) (固有番号 s243802)

5.20 偏導関数に関する以下の問いに答えなさい.

- (1) 関数 $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ の偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ および全微分 df を求めよ.
- (2) 関数 $z = f(v)$ および $v = g(x, y)$ は, 連続かつそれぞれの変数に関して 2 階微分可能であるとする. このとき, $\frac{\partial z}{\partial x}$ と $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を表す式を書きなさい.

(鳥取大類 24) (固有番号 s243904)

5.21 $f(x, y) = x^2y - 4xy + y^2$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ.
- (2) 方程式 $f(x, y) = 0$ で表される曲線上の点 $(1, 3)$ における接線の方程式を求めよ.
- (3) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(徳島大類 24) (固有番号 s244402)

5.22 2変数関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.
- (2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.
- (3) $f(x, y)$ の極値点と極値を求めよ.

(九州大類 24) (固有番号 s244711)

5.23 2変数関数 $f(x, y) = (xy + 2)e^{x-y}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) $f_x, f_y, f_{xy}, f_{xx}, f_{yy}$ を求めよ.
- (2) $f_x = f_y = 0$ を満たす (x, y) を求めよ.
- (3) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(佐賀大類 24) (固有番号 s244901)

5.24 $f(x, y) = \sin(3xy)$ について、偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を計算せよ.

(佐賀大類 24) (固有番号 s244913)

5.25 u, v に関する2変数関数 $z = \frac{e^{-u}}{v}$ と、 x, y に関する2変数関数 $u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2$ について、次の各問に答えよ.

- (1) $\frac{\partial z}{\partial u}$ を u と v で表せ.
- (2) $\frac{\partial u}{\partial x}$ を x と y で表せ.
- (3) $\frac{\partial z}{\partial x}$ を x と y で表せ.

(宮崎大類 24) (固有番号 s245304)

5.26 次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(x^3 - y^3) - 1}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$ に対して、 $f_x(0, 0)$ と $f_y(0, 0)$ を求めよ.
- (2) 関数 $f(x, y) = \frac{(x+1)^2(y+1)^2}{xy}$ ($xy \neq 0$) の極値を求めよ.

(島根大類 24) (固有番号 s245808)

5.27 関数 $f(x, y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 3x$ の極値を求めよ.

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246405)

6 重積分

6.1 重積分 $\iint_D e^{-x^2} dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ を求めよ.

(北見工業大類 24) (固有番号 s240206)

6.2 球の体積を積分を用いて求めるとき、次の問いに答えよ.

(1) 次の文中の (ア) ~ (カ) に正しい式を入れなさい。

直交座標 (x, y, z) で原点 O を中心とする半径 a の球の方程式は, (ア) であり, 球の上半分は関数 $z =$ (イ) で表される.

その定義域 D は (ウ) であり, 球の体積 V は次の重積分で与えられる.

$$V = 2 \iint_D \text{(イ)} dx dy \dots \dots \dots \text{①}$$

極座標 (r, θ) を用いると, D は (エ), (オ) と表され, 関数 z は $z =$ (カ) で表される.

- (2) ① 式を極座標に変換して表しなさい.
 (3) (2) の結果を用いて, 球の体積 V を求めなさい.

(岩手大類 24) (固有番号 s240303)

6.3 次の広義積分の値を求めよ. $\iint_{x \geq 0, y \geq 0} e^{-x^2 - xy - y^2} dx dy$

(東京工業大類 24) (固有番号 s240802)

6.4 領域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$ における次の二重積分 I の値を求めなさい.

$$I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

(東京農工大類 24) (固有番号 s240902)

6.5 次の重積分, 3重積分を求めよ.

(1) $\iint_D (x+y)^2 e^{2(x-y)} dx dy$, $D = \{(x, y) : |x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}$

ただし, e は自然対数の底とする.

(2) $\iint_D xy dx dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$

(3) $\iiint_V \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz$, $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

(電気通信大類 24) (固有番号 s241004)

6.6 下記の重積分について以下の問いに答えなさい.

$$I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leq y^2 - x^2, y \geq 0\}$$

- (1) 極座標に変換して D を図示しなさい.
 (2) I で示される積分領域の立体の外形を図示しなさい.
 (3) I を極座標で書きなさい.
 (4) I を求めなさい.

(千葉大類 24) (固有番号 s241204)

6.7 領域 $K = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq c \right\}$ とする. 3重積分

$$I = \iiint_K y^2 z^2 dx dy dz$$

を求めよ. ここで, a, b, c は正の定数である.

(筑波大類 24) (固有番号 s241311)

6.8 領域 D を

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x + y + z < 1, x, y, z > 0\}$$

と定める. このとき広義重積分

$$I = \iiint_D \frac{\log(x + y + z)}{\sqrt{xyz}} dx dy dz$$

を以下の手順で求めよ.

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} u &= x + y + z \\ uv &= y + z \\ uvw &= z \end{aligned}$$

により, D が領域 $E = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u, v, w < 1\}$ に写されることを示せ.

(2) 上の変数変換のヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ を求めよ.

(3) I の値を求めよ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241327)

6.9 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D e^{x+y} dx dy$$

ただし, 直線 $y = x$, $x = 1$, $y = 0$ で囲まれた領域を D とする.

(埼玉大類 24) (固有番号 s241403)

6.10 xy 直交座標平面において $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ と $x = 0$, $y = 0$ とを満たす領域を D とする. 二重積分 $\iint_D xy dx dy$ の値を求めよ.

(茨城大類 24) (固有番号 s241702)

6.11 次の連立不等式の表す領域を D とする.

$$y \leq x, y \leq -x, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$$

以下の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ に対して, $J = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r}$ とおく. J を計算せよ.

(3) 2 重積分 $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ を計算せよ.

(茨城大類 24) (固有番号 s241704)

6.12 \mathbb{R}^2 の 2 つの閉領域 U, V を

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2x + y \leq 1\}$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 3y^2 + 8xy + 1 \geq 0\}$$

で定める. 次の定積分を求めよ.

$$\iint_{U \cap V} |x - 2y| dx dy$$

(信州大類 24) (固有番号 s241904)

6.13 次の定積分を計算せよ.

$$I = \int_D z^2 dx dy dz \quad D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y \geq 0$$

(新潟大類 24) (固有番号 s242012)

6.14 xy 平面において, $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$ で表される領域を D とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) D の概形をかき, その面積を求めなさい.

(2) 2重積分 $\iint_D x dx dy$ を求めなさい.

(長岡技科大類 24) (固有番号 s242102)

6.15 (1) 変換 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ($r > 0$) のヤコビ行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 2} \log(1+x^2+y^2) dx dy$$

を計算せよ.

(金沢大類 24) (固有番号 s242203)

6.16 $\iint_R (y - x^3) dx dy$, ($R : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\sqrt{x}$) の値を求めよ.

また積分領域 R も図示せよ.

(福井大類 24) (固有番号 s242409)

6.17 次の重積分を計算せよ.

(1) $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 < y < 1, \sqrt{y} < x < 1\}$

(2) $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 < y < 1, -1 < x < -y\}$

(静岡大類 24) (固有番号 s242501)

6.18 a, b を正の実数とする. 次の広義積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_D \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}} dx dy, \quad D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

(岐阜大類 24) (固有番号 s242602)

6.19 次の2重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \log(x+y) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 1 < y < 2\}$$

(名古屋工業大類 24) (固有番号 s242905)

6.20 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xye^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 < \sqrt{3}y < x, x^2 + y^2 \leq 5\}$$

(名古屋工業大類 25) (固有番号 s252902)

6.21 次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D xy^2 dx dy \quad (D : 0 \leq x \leq y \leq 1)$$

(三重大類 24) (固有番号 s243105)

6.22 次の2重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

(神戸大類 24) (固有番号 s243804)

6.23 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2) (\log \sqrt{x^2 + y^2})^2} dx dy$$

ただし、積分領域 D を次で定める.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > e^2\}$$

(2) 関数

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2) \left\{ (\log \sqrt{x^2 + y^2})^{1/2} + (\log \sqrt{x^2 + y^2})^2 \right\}}$$

についての広義重積分 $\iint_E f(x, y) dx dy$ が収束することを示せ. ただし、積分領域 E を次で定める.

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$$

(広島大類 24) (固有番号 s244106)

6.24 一様な密度を持つ半球体 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) の重心の座標を求めよ.

(広島大類 24) (固有番号 s244111)

6.25 2変数関数 $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ について、以下の問いに答えよ.

(1) f の勾配ベクトル $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ を求めよ.

また、勾配ベクトルの具体的な値を $(0, 0)$, $(0, \pi/4)$, $(0, \pi/2)$ において求めよ.

(2) 座標平面上の4点 $(0, 0)$, $(0, \pi/2)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, -\pi/2)$ を頂点とする平行四辺形が定める領域を D

とする(図1). 2重積分 $\iint_D |f(x, y)| dx dy$ の値を求めよ.

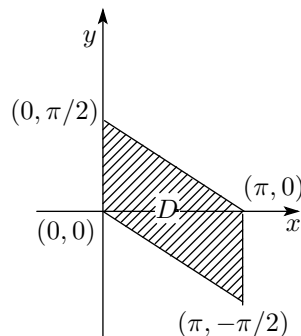


図 1

(広島市立大類 24) (固有番号 s244204)

6.26 $a > 0$ に対して、次の問いに答えよ.

(1) $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ とするとき, $\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$ を求めよ.

(徳島大類 24) (固有番号 s244407)

6.27 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x - 1 \leq y \leq -x + 1, x - 1 \leq y \leq x + 1\}$ とおく.

(1) 1次変換 $u = x + y, v = x - y$ によって D が移される uv 平面上の集合を図示せよ.

(2) (1) の変数変換において、ヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D (x + y)^2 e^{x-y} dx dy$$

を求めよ.

(九州大類 24) (固有番号 s244710)

6.28 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ のとき、重積分 $\iint_D \log(x + y + 1) dx dy$ を求めよ.

(佐賀大類 24) (固有番号 s244903)

6.29 次の重積分を計算せよ.

$$\int_0^2 \left\{ \int_0^4 (4 - x^2 - y) dy \right\} dx$$

(佐賀大類 24) (固有番号 s244914)

6.30 次の2重積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_D (x^3 + y^3) dx dy, \quad \text{ただし, } D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

(宮崎大類 24) (固有番号 s245302)

6.31 適当な変数変換を用いて、次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x + y) e^{x-y} dx dy, \quad \text{但し, } D : 0 \leq x - y \leq x + y \leq 1$$

(滋賀県立大類 24) (固有番号 s246004)

6.32 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_D x^2 y dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

(2) $\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246406)

6.33 2重積分 $\iint_D \sqrt{x-1} dx dy$ ($D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$) を求めなさい.

(和歌山大類 24) (固有番号 s246505)

7 微分方程式

7.1 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + 1 \quad (A)$$

について、以下の設問に答えよ。途中の計算手順を詳しく記述すること。

- (1) 式 (A) の特殊解として $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ を仮定し、係数 a_1, a_2, a_3 を定めよ。
- (2) 式 (A) の一般解を求めよ。

(北海道大類 24) (固有番号 s240103)

7.2 2階微分方程式 $y'' + 9y = 0$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $y = A \sin 3x - B \cos 3x$ (A, B は任意定数) は一般解であることを証明しなさい。
- (2) 初期条件「 $x = 0$ のとき $y = 1, y' = 3$ 」を満たす特殊解を求めなさい。
- (3) 境界条件「 $x = \frac{\pi}{3}$ のとき $y = 1, x = \frac{\pi}{9}$ のとき $y = 1$ 」を満たす特殊解を求めなさい。

(岩手大類 24) (固有番号 s240304)

7.3 質量 m の二個の質点がバネ定数 k のバネでつながれ、 x 軸上を運動する。バネの自然長をゼロとし、二個の質点の位置をそれぞれ x_1, x_2 とする。

- (1) 運動方程式は次式で与えられることを説明せよ。

$$m \frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2),$$

$$m \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1).$$

- (2) 重心の座標 $X = (x_1 + x_2)/2$ と相対座標 $x = x_2 - x_1$ を用いて、運動方程式を書き直せ。
- (3) 重心運動の運動方程式の一般解を求めよ。
- (4) 相対運動の運動方程式の一般解を求めよ。全体の運動の一般解を求めよ。

(お茶の水女子大類 24) (固有番号 s240604)

7.4 (1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = (y - k)y \quad (*)$$

について以下の問いに答えよ。ただし、 k は正の定数である。

- (a) y と k の関係に注意し、(*) の一般解を求めよ。
 - (b) $x = 0$ のとき、 $y = y_0$ とする。この場合の(*) の解を求めよ。ただし、 $y_0 > 0$ とする。
 - (c) (b) の解について、 y_0 を k により適切に場合分けし、 y と x の関係を図示せよ。
- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし、 e は自然対数の底である。

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x + e^{-5x}$$

(東京大類 24) (固有番号 s240701)

7.5 微分方程式

$$y'' - 2y' + y = (3x + 1)e^x$$

の解 $y = y(x)$ のうち、 $y(0) = 3, y'(0) = -2$ を満たすものを求めなさい。

(東京農工大類 24) (固有番号 s240904)

7.6 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $(xy^3 + 3x^3y) \frac{dy}{dx} - (y^4 + 4x^2y^2 + x^4) = 0$

(2) $xy \frac{dy}{dx} = \sqrt{4 - y^2}$

(横浜国立大類 24) (固有番号 s241102)

7.7 次の微分方程式を与えられた初期条件のもとで解きなさい.

(1) $y' + y + y^2 = 0$, $y(0) = 1$

(2) $y' + y + x = 0$, $y(0) = 2$

(千葉大類 24) (固有番号 s241203)

7.8 微分方程式

$y' = \frac{1}{x}y + xy^2$ の解を求めよ. ただし, $y' = \frac{dy}{dx}$ とする.

(筑波大類 24) (固有番号 s241301)

7.9 関数 $x(t)$ に関する以下の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2 \quad \text{ただし } x(0) = 0 \text{ とする.}$$

(筑波大類 24) (固有番号 s241317)

7.10 (1) 以下の微分方程式を解け.

(a) $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 6e^{-x}$

(2) 室温が 20 の部屋に置いたコーヒーの温度の変化率は, 時刻 t [分] におけるコーヒーの温度 $T(t)$ [] と室温の差に比例する.

(a) このときの比例係数を $-k(k > 0)$ とし, 時間 t と温度 $T(t)$ の関係を微分方程式を用いて表せ.

(b) $t = 0$ で 100 だったコーヒーが, 3分後に 60 になったとすると, 40 になるまでの時間を求めよ.

(埼玉大類 24) (固有番号 s241406)

7.11 以下の各問に答えよ.

(1) 初期条件 $x = 0, y = 1$ のもとで, 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = xy$ を解け.

(2) 初期条件 $x = 0, y = 1$ のもとで, 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = x + y$ を解け.

(茨城大類 24) (固有番号 s241706)

7.12 以下の問いに答えなさい.

(1) $u(t)$ に関する常微分方程式 $t \frac{du}{dt} - u = 0$ の一般解を求めなさい.

(2) $f(t)$ を微分可能な関数とする. 2変数関数 $z(x, y) = f(x^2y^3)$ が偏微分方程式

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 5z = 0$$

の解になるような, $f(t)$ および $z(x, y)$ を求めなさい.

- 7.13 (1) 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ の接線の集合が表す微分方程式を求めよ.
 (2) 線形微分方程式 $y' + y = 2 + 2x$ の一般解を求めよ.
 (3) 法線影の長さが一定の長さ $a (> 0)$ に等しい曲線群のうち、原点 $O(0, 0)$ を通る第一象限の曲線を求めよ. ここで法線影とは、曲線上の一点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点を H 、 P における法線が x 軸と交わる点を N としたときの有向線分 HN の長さをいう.

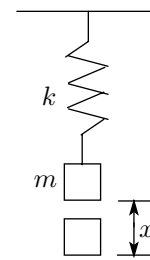
(富山大類 24) (固有番号 s242306)

7.14 つぎの微分方程式の一般解を導出して、初期条件を満たす解を求めよ.

- (1) $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$ (初期条件 : $x = 0$ のとき, $y = 0$)
 (2) $\frac{dy}{dx} - y \sin x = \sin x$ (初期条件 : $x = 0$ のとき, $y = 0$)
 (3) $x \frac{dy}{dx} + y = x(1 - x^2)$ (初期条件 : $x = 1$ のとき, $y = 0$)

(福井大類 24) (固有番号 s242411)

7.15 図のように、バネ定数が k で、質量を無視できるバネに、質量 m のおもりを吊り下げる. つりあった位置から、上下方向に振動させる時の変位を x とする. このとき、時間 t に対するおもりの運動は、次の運動方程式によって表現できる.



$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

- (1) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくとき、 $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ は、上式の一般解であることを示せ.
 (2) $m = 2.25(kg)$, $k = 4\pi^2(kg \cdot m/s^2/m)$ とするとき、おもりの振動の周期を求めなさい.
 (3) $t = 0$ において、 $x = 2(cm)$, $\frac{dx}{dt} = 0 (cm/s)$ とするとき、定数 A, B の値を求め、3秒間の変位と時間の関係のおよその形を示せ.

(福井大類 24) (固有番号 s242423)

7.16 次の微分方程式の解 $y = y(x)$ を求めよ ((1) は一般解を求めよ).

$$(1) \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad (2) \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2, \\ y(0) = 0, \\ \frac{dy}{dx}(0) = 0 \end{cases}$$

(静岡大類 24) (固有番号 s242503)

7.17 次の各微分方程式の一般解を求めよ.

- (1) $x \frac{dy}{dx} = 2y$ (2) $\frac{dy}{dx} \sin x + y \cos x = x$ (3) $(2x^2y + y^2) dx + (x^3 + xy) dy = 0$

(静岡大類 24) (固有番号 s242508)

7.18 $g(x, y)$ および $h(x, y)$ が m 次同次関数であるとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

は同次形微分方程式であることを示せ. ただし, m 次同次関数とは, 任意の実数 t に対して

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

を満たす関数 $f(x, y)$ のことをいう.

(静岡大類 24) (固有番号 s242509)

7.19 次の微分方程式 ① および ② について以下の問いに答えよ.

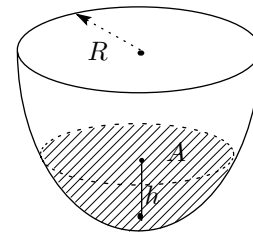
$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x \quad \dots\dots ②$$

- (1) 微分方程式 ① の一般解を求めよ.
- (2) $y = \frac{x \log x}{2}$ は微分方程式 ② の特殊解であることを示せ.
- (3) 微分方程式 ② の一般解を求めよ.

(静岡大類 24) (固有番号 s242510)

7.20 半径 R の上に開いた半球があり, 上面が地面に対して平行になるように置かれている. この半球に水が入っており (下図の斜線部分), 半球の底から測った水面の高さを h とする. 次の問いに答えよ. ただし, $h \leq R$ とする.



- (1) 水面の面積 A を h の関数として表せ.
- (2) 水面の体積 V を h の関数として求めよ.
- (3) 最下部に微小な小穴を開けた. 単位時間当たりの水の体積 V の変化, すなわち dV/dt を示せ. ただし, 小穴の大きさは十分に小さく, 小穴を開けても半球の体積は変化しないと考えてよい.
- (4) (3) の状況において, 流体に関する基本定理から, 単位時間当たりに小穴から流れ出る水の体積 (体積速度) は $Sk\sqrt{h}$ で表される (S は微小な小穴の面積, k は正の定数). 単位時間当たりに小穴から流出する水の体積が, 半球において単位時間当たりに減少する水の体積に等しいことを用いて, 高さ h と時間 t の関係式 (微分方程式) を示せ. さらに, $t = 0$ において $h = R$ であったとし, 水が全て流出するのに要する時間 T を求めよ.

(豊橋技科大類 25) (固有番号 s252703)

7.21 微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ は, 条件 $\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$ を満たすとき, 完全形

という. 関数 $f(x)$ は $(0, \infty)$ で微分可能 かつ $f(\pi) = 1$ である. 微分方程式

$$\left(\sin x - f(x) \right) \frac{y}{x} dx + f(x) dy = 0, \quad x > 0$$

は完全形とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ を求めよ.
- (2) 微分方程式の一般解を求めよ.

(名古屋工業大類 24) (固有番号 s242908)

7.22 関数 $y = e^x$ が微分方程式 $xy' + p(x)y = x$ の 1 つの解である. ただし, $y' = \frac{dy}{dx}$ である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $p(x)$ を求めよ.
- (2) 微分方程式の一般解を求めよ.
- (3) 境界条件 : $x = \ln 2$ のとき, $y(x) = 0$ を満たす微分方程式の特殊解を求めよ.

(名古屋工業大類 25) (固有番号 s252909)

7.23 質量 m の物体が速度に比例する空気抵抗を重力と反対方向に受けながら落下しているものとする. ここで, 空気抵抗の速度に対する比例係数を k とし, 重力加速度を g とする. また, これら定数 m, k, g は速度に関係なく一定であるとする.

- (1) 落下している物体の運動を記述する微分方程式を落下速度 $v(t)$ を用いて表しなさい. ただし, 物体の落下方向を正の方向とする.
- (2) 初速度 $v(0) = 0$ として, (1) の微分方程式を解きなさい. また, 時間経過とともに $v(t)$ がある一定の値に近づくことを示し, その値を求めなさい.

(三重大類 24) (固有番号 s243106)

7.24 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t) \quad \dots (\mathcal{A})$$

の一般解 $x(t)$ は, $A = 0$ の場合の一般解 $x_0(t)$ と $A \neq 0$ の特解 $x_1(t)$ の和 $x_0(t) + x_1(t)$ で表される. 以下の問いに答えよ. ただし, A, ω, ω_0 は実定数である.

- (1) $x_0(t)$ を求めよ.
- (2) $x_1(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ とおいて式 (\mathcal{A}) に代入し, 未知定数 α と β を決定することにより $x_1(t)$ を求めよ. ただし, $\omega \neq \omega_0$ とする.
- (3) 初期条件が $x(0) = x_0, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ の場合, 式 (\mathcal{A}) の解を求めよ. また, $\omega \rightarrow \omega_0$ とした時, その解はどうなるか.

(奈良女子大類 24) (固有番号 s243203)

7.25 次の微分方程式を考える.

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = 2x(y^2 + 1)$$

- (1) $(*)$ の一般解を求めよ.
- (2) 初期条件 $y(0) = 1$ を満たす $(*)$ の解を求めよ.

(京都工芸繊維大類 24) (固有番号 s243404)

7.26 次の微分方程式に関する以下の問に答えよ.

- (1) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.
- (2) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^2 + 3x + 1$ の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.
- (3) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^2 + 3x + 1$ の解 $y = y(x)$ を

初期条件「 $x = 0$ の時に, $y = 10$ かつ $\frac{dy}{dx} = -6$ 」のもとで求めよ.

(大阪大類 24) (固有番号 s243502)

7.27 (1) 常微分方程式

$$x^2 \frac{d^2f(x)}{dx^2} + ax \frac{df(x)}{dx} + bf(x) = 0, \quad (x > 0)$$

を考える. $t = \log x$ と変数変換したとき $g(t) = f(e^t)$ の常微分方程式を導け. なお a, b は実定数であり, \log は自然対数である.

(2) 常微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 3x \frac{df(x)}{dx} - 3f(x) = 0, \quad (x > 0)$$

を解け.

(3) 常微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 3x \frac{df(x)}{dx} - 3f(x) = \log x, \quad (x > 0)$$

を解け.

(大阪大類 24) (固有番号 s243508)

7.28 $x = x(t)$ を変数 t の C^∞ 級関数とする. このとき, 次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 4 = 0$$

ただし, $x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$ とする.

(神戸大類 24) (固有番号 s243805)

7.29 x の関数 y に関する, 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $(x+3)y' + xy^2 = 0$

(2) $y'' - 6y' + 8y = x^2 + 1$

(鳥取大類 24) (固有番号 s243901)

7.30 $u(r)$ は区間 $(0, \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とし, さらに, $u''(r)$ が $(0, \infty)$ 上で連続であるとする. 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = u(r) \quad (\text{ただし, } r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r)$ を示せ.

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ が成り立つためには,

$$u(r) = a \log r + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

と表されることが必要十分であることを示せ.

(広島大類 24) (固有番号 s244103)

7.31 次の微分方程式の解を求めよ. ただし, $x = 1$ のとき $y = 2$ とする.

$$x \frac{dy}{dx} + y = 2x$$

(広島大類 24) (固有番号 s244112)

7.32 微分方程式 $\frac{d^2 y}{dt^2} - 6 \frac{dy}{dt} + 9y + 3 = 0$ の一般解を求めよ.

(広島大類 25) (固有番号 s254102)

7.33 微分方程式 $\frac{dy}{dx} + ay = b$ を解け. ただし, a, b は 0 でない定数である.

(広島市立大類 24) (固有番号 s244202)

7.34 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(\tan x) \frac{dy}{dx} = 2y$$

(山口大類 24) (固有番号 s244301)

7.35 連立微分方程式 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の一般解を求めよ.

(徳島大類 24) (固有番号 s244404)

7.36 $y = y(x)$ に対する微分方程式 $y'' + x(y')^2 = 0$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $p = y'$ とおいて, p の満たす微分方程式を求めよ.
- (2) (1) で導かれた微分方程式の一般解 $p = p(x)$ を求めよ.
- (3) もとの微分方程式の解で, $y(0) = 1, y'(0) = -2$ を満たす解 y を求めよ.

(徳島大類 24) (固有番号 s244408)

7.37 関数 $y = y(x), z = z(x)$ のそれぞれについて, x に関する微分を y', z' とし, 2階微分を y'', z'' とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 5y' + 4y = e^{2x}$$

- (3) 次の y と z に関する連立微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} y' + 2y + 2z = -e^{2x} \\ y + z' + 3z = 0 \end{cases}$$

(九州大類 24) (固有番号 s244702)

7.38 次の微分方程式を解きなさい. ただし, a は定数であり, $x = x_0$ のとき $y = y_0$ とする.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x^2}$$

(佐賀大類 24) (固有番号 s244910)

7.39 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.

$$x \tan \frac{y}{x} - y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

(宮崎大類 24) (固有番号 s245305)

7.40 次の微分方程式の一般解を求めよ.

- (1) $(xy^2 - x)dx - (y + x^2y)dy = 0$
- (2) $(y^2 + 1)dx + (2xy + \cos y)dy = 0$
- (3) $y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x + 3e^{-x}$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245403)

7.41 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $(x^2 + y^2)y' = xy$ (ヒント : $y/x = u$ とおく.)

(2) $y''' + 3y' = 0$

(3) $y'' + 6y' + 10y = 4e^{-2x}$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245408)

7.42 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} = 10x$ を解きなさい. ただし, $x = 3$ のとき, $y = 0$ および $dy/dx = 0$ とする.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245424)

7.43 x の関数 y に関する微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$ について次の問に答えなさい.

(1) この微分方程式の一般解は, $y = A \sin kx + B \cos kx$ で与えられる (A, B は未定係数). $x = 0$ のとき $y = 0$ とすると, 未定係数 B の値はいくらか.

(2) さらに, $x = 10$ のとき, $y = 0$ とする. 未定係数 A が 0 以外の値を取り得るための k の値を求めなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245428)

7.44 微分方程式 $y'' + 8y' + 15y = 0$ の一般解を求めなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245433)

7.45 $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$ の一般解を求めなさい. ただし, k は定数とします.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245437)

7.46 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}$$

(首都大類 24) (固有番号 s245905)

7.47 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$$

の特殊解を求めよ.

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書け.

[注: (1) における「同次」および (2) における「非同次」は, それぞれ「斉次」および「非斉次」といわれることもある.]

(滋賀県立大類 24) (固有番号 s246002)

7.48 円筒形の容器に水位 h_0 [cm] まで水が入っている. いま, この容器の底から水を抜き始めたところ, t_1 [分] 後には水位が h_1 [cm] となった. また, 水位の低下速度 $-\frac{dh}{dt}$ [cm/分] は, その時の水位 h [cm] に比例していた. 水位が $\frac{h_0}{2}$ [cm] となる時間 t [分] を与える式を導きなさい. ただし, 導出過程も答案用紙に書きなさい. また, ここで水位は容器の底から水面までの高さのことである.

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246411)

7.49 次の微分方程式について、与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい。

(1) $y \frac{dy}{dx} = 3x^2$, $y(0) = 1$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

(3) $\frac{dy}{dx} + y = 2x$, $y(0) = 1$

(和歌山大類 24) (固有番号 s246506)

線形代数

8 ベクトル

8.1 平面 $x + y + z = 0$ および平面 $x + 2y + 3z = 0$ と直交し、原点を通る平面の方程式を求めよ。

(北見工業大類 24) (固有番号 s240207)

8.2 次の3つのベクトル v_1, v_2, v_3 が一次従属であるとき a の値を求めよ。

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

(北見工業大類 24) (固有番号 s240208)

8.3 xyz 空間内に4点 $A(-3, -3, 1)$, $B(2, -8, 1)$, $C(-2, -3, -2)$, $D(2, 1, 4)$ があるとき、次の問いに答えなさい。

(1) 4点 A, B, C, D を通る球 S の方程式を求めなさい。

(2) 球 S の中心を P とするとき、ベクトル $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ は線形独立であることを証明しなさい。

(3) 点 C を通り、ベクトル \overrightarrow{AD} に垂直な平面 α の方程式を求めなさい。また、平面 α と直線

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = z-2$$

との交点の座標を求めなさい。

(4) 点 D から平面 α に直線を引き、 α との交点を E とするとき、線分 DE の長さが最小となるように点 E の座標を定めなさい。このとき、線分 DE の長さを求めなさい。

(岩手大類 24) (固有番号 s240301)

8.4 ベクトル $a = (1, -1, 1)$, $b = (2, 1, -1)$ について、次の問いに答えなさい。

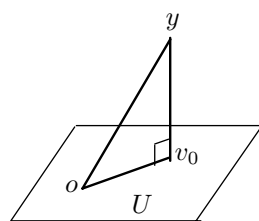
(1) a と b は直交することを示しなさい。

(2) a と b を含み原点を通る平面上にある点 (x, y, z) を、媒介変数 s と t を用いた式で表しなさい。

(3) ベクトル $p = (3, 1, 2)$ が (2) の平面に投ずる正射影を $q = \alpha a + \beta b$ と書くとき、係数 α と β を求めなさい。

(秋田大類 24) (固有番号 s240402)

- 8.5 U をベクトル $v_1 = (2, 1, 1)$ と $v_2 = (-1, 2, 0)$ が張る線形部分空間とする. そのとき, 点 $y = (10, 20, 2)$ から最も近い U 上の点 v_0 を求めよ.



(筑波大類 24) (固有番号 s241308)

- 8.6 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 において $ax + by + cz + d = 0$ で与えられる平面 H を考える. 平面 H 上にない点 P_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) とし, H 上の点 P_1 の座標を (x_1, y_1, z_1) とする. また, $v = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) H の単位法線ベクトル u (H と直交する長さ 1 のベクトル) を求めよ.
- (2) $v - u, v u$ と u は直交することを示せ. また $v - u, v u$ の幾何学的な意味を説明せよ. ただし, u, v は u と v の内積を表す.
- (3) 点 P_0 と平面 H との距離は $|u, v|$ で与えられることを説明せよ.
- (4) (3) を用いて点 P_0 と平面 H との距離の公式

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

を証明せよ.

(新潟大類 24) (固有番号 s242015)

- 8.7 4つの列ベクトルがある.

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 21 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 4つのベクトル a, b, c, d が一次従属となるようにベクトル d の未知数 x を決定せよ.
- (2) d を a と b と c の一次結合として表せ, (すなわち, a, b, c, d の関係式を求めよ)

(福井大類 24) (固有番号 s242412)

- 8.8 以下の問いに答えよ.

- (1) ベクトル $a = (1, 0, -2), b = (3, 2, -2), c = (c_1, c_2, c_3)$ がある. ただし, c_1, c_2, c_3 は実数である. c は a と b に直交し, c の大きさは 9 である. c を求めよ.
- (2) 直交座標空間内に, 点 $D(3, -4, 2)$ を通りベクトル $p = (1, -1, 0)$ に平行な直線がある. さらに点 $E(5, -6, 4)$ を中心とした半径 6 の球がある. 直線と球との交点の座標 (x, y, z) を求めよ.

(豊橋技科大類 24) (固有番号 s242702)

- 8.9 (x, y, z) 空間における次の 2 直線の距離を求めよ.

$$\frac{x-5}{2} = -\frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{4}, \quad \frac{x-3}{8} = y+7 = -\frac{z+2}{5}$$

(名古屋工業大類 25) (固有番号 s252904)

- 8.10 ベクトル $A = (A_x, A_y, A_z)$ とベクトル $B = (B_x, B_y, B_z)$ が与えられている. 以下の問いに答えよ.

- (1) ベクトル A と B によって構成される平行四辺形の面積を求めよ。
 (2) ベクトル A と B がなす角度を θ とした場合に、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(三重大類 24) (固有番号 s243103)

8.11 3次元直交座標 xyz での平面と直線の交点について考える。

- (1) 3点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ を通る平面 A の方程式を求めよ。
 (2) 点 (x_0, y_0, z_0) は $x_0 + y_0 + z_0 \neq 0$ を満たす点とする。2点 $(0, 0, 0)$, (x_0, y_0, z_0) を通る直線 B の方程式を求めよ。
 (3) 平面 A と直線 B の交点を求めよ。

(広島市立大類 24) (固有番号 s244206)

8.12 3次元ベクトル $a = (2, 2, 3)$, $b = (2, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ について、次の問いに答えよ。

- (1) a と b ととも直交する長さ3の3次元ベクトル c を求めよ。
 (2) a, b, c が1次独立であることを示せ。

(佐賀大類 24) (固有番号 s244905)

8.13 ベクトルに関する以下の各問に答えよ。

- (1) ベクトル a, b, c について、 $2a + 2b + c = 0$, $|a| = |b| = \frac{|c|}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} \neq 0$ が成り立つ。ベクトル a, b のなす角 θ を求めよ。ただし、求める θ の範囲は $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする。
 (2) $\vec{OA} = (1, 2, 3)$, $\vec{OB} = (1, 1, -1)$, $\vec{OC} = (1, 0, 1)$ であり、原点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を D とする。 \vec{OD} ならびに $\triangle ABC$ の面積 S , 四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245405)

8.14 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル a と b とは互いに直交になり、 $|a| = 3$, $|b| = 4$ であるとき、 $|(a+b) \times (a-b)|$ を求めよ。ただし、“ \times ”はベクトルの外積を表し、 $a \times b = -b \times a$, $|a \times b| = |a||b|\sin \theta$ である。 $|a|$ と $|b|$ はそれぞれ a と b の大きさを表す。また、 θ は a から b へのなす角である。
 (2) $a = (2, -3, 1)$, $b = (1, -2, 3)$, $c = (1, 2, -7)$ であるとき、 $A \perp a$, $A \perp b$, $A \cdot c = 10$ を満たすベクトル A を求めよ。ただし、“ \cdot ”はベクトルの内積を表し、 $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ である。また、外積について $a \times b = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ にもなる。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245409)

8.15 直交座標系 $O-XYZ$ において、平面 $C_A : x + y = 0$ と平面 $C_B : 5y + z = 0$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) 両平面の法線ベクトルを求めよ。さらに、両平面の交線にある交線ベクトルを求めよ。
 (2) 上記の交線ベクトルを平面 C_P の法線ベクトルとして、点 $P(1, 2, 1)$ を含んで平面 C_A と平面 C_B にそれぞれ直交する平面 C_P を求めよ。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245410)

8.16 3次元の空間に直交座標 x 軸, y 軸, z 軸を考える。点 $A(2, 2, 2\sqrt{2})$, 点 $B(3, 3, -3\sqrt{2})$ があるとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 原点を O とした時, $\angle AOB$ を求めなさい.
- (2) 原点 O から線分 AB に垂線を下ろしたとき, その足を点 P とする. 線分 AP と線分 PB の長さの比を求めなさい. また, その時の点 P の座標も求めなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245414)

8.17 x 軸と y 軸からなる直交座標平面上に点 $A(2, 1)$ と点 $B(2, -1)$ があるとき, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 点 A の y 軸に関して対称な点 P の座標を求めなさい.
- (2) 座標平面の原点を O としたとき, $OA \perp OQ$ かつ $OA = OQ$ となるような, 第 2 象限にある点 Q の座標を求めなさい.
- (3) ベクトル \vec{OA} と \vec{OB} の内積を求めなさい. また, $\angle AOB$ を θ としたとき, $\cos \theta$ の値を求めなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245419)

8.18 次のベクトルの組 $\{v_1, v_2, v_3\}$ について, 以下の問いに答えよ.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- (1) v_1, v_2, v_3 は 1 次独立であることを示せ.
- (2) \mathbb{R}^3 のベクトル $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を v_1, v_2, v_3 の 1 次結合として表せ.

(島根大類 24) (固有番号 s245804)

8.19 直交座標系における 2 つのベクトルを $a = \begin{bmatrix} 3 \\ k \\ -2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 2 つのベクトル a と b が直交するための k を求めなさい.
- (2) この k を用いて a のノルム (大きさ) $\|a\|$ を求めなさい.

(首都大類 24) (固有番号 s245902)

9 行列

9.1 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ とおく. A が逆行列を持つための条件を求め, 更にその場合に逆行列を求めよ.

(東京工業大類 24) (固有番号 s240804)

9.2 E を単位行列とすると, 次の実交代行列 A に対して, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) $E + A$ の逆行列を求めよ.

(2) 上の結果を利用して, $P = (E - A)(E + A)^{-1}$ を求めよ.

(3) P は直交行列であることを示せ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241307)

9.3 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ とするとき, 次を求めよ.

(1) $3A$

(2) A^2

(3) $|X - 3A| \neq 0$ の条件で

$$X^2 - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} X - 2X + \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ を満たす 2 次正方行列 } X \text{ を求めよ.}$$

(福井大類 24) (固有番号 s242410)

9.4 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大類 24) (固有番号 s242419)

9.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とし, t が転置を表すとき, 次の関係が成り立つことを示せ.

(1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(2) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

(福井大類 24) (固有番号 s242420)

9.6 以下で与えられる 3 次正方実数行列 A と可換な 3 次正方実数行列 X を下記 (1) ~ (3) の手順により求めなさい. ここで λ および β は任意の実数とする.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \beta & 0 \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(1) 3 次単位行列 E は, 任意の 3 次正方行列と可換であることを示しなさい.

(2) 行列 A を, E と以下に示す行列 F の線形結合の形で表しなさい.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 上記の (1) および (2) の結果を用いて, 行列 A と可換な行列 X を求めなさい.

(三重大類 24) (固有番号 s243107)

9.7 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$

と、ベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して、次の問に答えよ。ただし、 a は実数である。

- (1) 3つのベクトル Ae_1, Ae_2, Ae_3 が一次従属となるときの a の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた a の値に対し、

$$A^{2n-1} = (-2)^{n-1}A$$

が成り立つことを示せ。ただし、 n は1以上の整数である。

(奈良女子大類 24) (固有番号 s243206)

9.8 A を n 次の正方行列とし、 $E + A$ が正則行列であるとする。ここで、 E は単位行列である。このとき、次の(1)~(3)に答えよ。

- (1) 等式 $(E - A)(E + A)^{-1} = (E + A)^{-1}(E - A)$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) $E + {}^tA$ は正則であることを示し、逆行列 $(E + {}^tA)^{-1}$ を、 $(E + A)^{-1}$ を使って表せ。ここで、 tA は A の転置行列を表す。
- (3) A が交代行列(つまり、 ${}^tA = -A$)ならば、 $(E - A)(E + A)^{-1}$ は直交行列であることを証明せよ。ただし、ある行列 B が直交行列であるとは、 ${}^tBB = B{}^tB = E$ であることをいう。

(京都大類 24) (固有番号 s243304)

9.9 λ を実定数とし、3次実正方行列 A, B を次で定める。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ。ただし、3次実正方行列 X, Y が可換であるとは、 $XY = YX$ が成り立つことである。

- (1) A と可換な3次実正方行列をすべて求めよ。
- (2) B と可換な3次実正方行列をすべて求めよ。
- (3) B と可換な3次実正方行列どうしは可換であることを示せ。

(広島大類 24) (固有番号 s244101)

9.10 4次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

(高知大類 24) (固有番号 s244505)

9.11 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ のとき、次の等式が成り立つことを示しなさい。

- (1) $A(\theta)^{-1} = A(-\theta)$
- (2) $A(\alpha + \beta) = A(\alpha)A(\beta)$

(佐賀大類 24) (固有番号 s244915)

9.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であるか確かめ、正則であれば逆行列を求めなさい。

(佐賀大類 24) (固有番号 s244917)

9.13 行列 $A = (\sin \theta \quad \cos \theta)$, 行列 $B = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ がある。このとき、以下の各問に答えよ。

(1) AB ならびに BA を求めよ。

(2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = 2BA - C$ とするとき、 D を求めよ。

(3) n を正の整数, $r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ とするとき, $D^n r = \begin{pmatrix} \cos(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \\ \sin(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \end{pmatrix}$ であることを証明せよ。

(4) $R = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$ とするとき $D^n = R$ の形に書けることを示し, β を求めよ。また, このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245404)

9.14 2×2 の正方行列: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある。 $A \neq O$, $A^2 = O$ とするとき、以下の問いに答えなさい。

ただし, O は零行列を表わす。

(1) $ad - bc$ の値と, その値を導出した過程を示しなさい。

(2) $a + d$ の値と, その値を導出した過程を示しなさい。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245413)

9.15 次の行列の積を計算しなさい。

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245427)

9.16 以下に示す行列 A の逆行列 A^{-1} を求め、つぎに, AA^{-1} が単位行列となることを計算で示しなさい。

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245431)

9.17 2 次の正方行列 $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を考える。 2 つの列ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ が互いに直交する単位

ベクトルであるとする。このとき, 2 つの行ベクトル $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$ も互いに直交する単位ベクトルであることを示せ。

(香川大類 24) (固有番号 s245702)

9.18 行列 A を $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき、以下の問いに答えなさい。

(1) A^2 を求めなさい。

- (2) 逆行列 A^{-1} を求めなさい。
 (3) 転置行列 tA を求めなさい。

(首都大類 24) (固有番号 s245901)

9.19 次の行列 A について、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし、 $a \neq 3$ とする。

- (1) 逆行列 A^{-1} の成分がすべて整数となるような a の条件をすべて示せ。
 (2) (1) で求めた条件における逆行列をすべて求めよ。

(はこだて未来大類 24) (固有番号 s246301)

9.20 行列 $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246402)

9.21 行列 $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ が正則かどうか調べ、正則のときはその逆行列を求めなさい。

(和歌山大類 24) (固有番号 s246502)

10 行列式

10.1 下記の行列 A について、次の問いに答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- (1) A の行列式を求めなさい。
 (2) A の逆行列を求めなさい。

(秋田大類 24) (固有番号 s240401)

10.2 3次元ユークリッド空間の3つのベクトル:

$$\mathbf{a} = (1, 2, -1) \quad \mathbf{b} = (2, 3, 5) \quad \mathbf{c} = (-1, 0, 2)$$

によって張られる平行六面体の体積を求めなさい。

(筑波大類 24) (固有番号 s241316)

10.3 区間 (a, b) 上の微分可能な関数 $a_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq 3$, を (i, j) -成分とする3次正方行列を $A(t) = (a_{ij}(t))$ とする。

- (1) 行列式 $|A(t)|$ の微分 $|A(t)|'$ に関する次の等式を示せ。

$$|A(t)|' = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

(2) $A(t)$ が正則であるとき, 上の等式の右辺の各項を行に関して余因子展開することにより,

$$|A(t)|' = \text{Tr} (A'(t)A(t)^{-1}) |A(t)|$$

が成り立つことを示せ. ここで $A'(t) = (a'_{ij}(t))$ であり, Tr はトレースを表す.

(筑波大類 24) (固有番号 s241325)

10.4 次の行列式を求めよ. ただし, 解答は因数分解した形で表せ.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

(埼玉大類 24) (固有番号 s241405)

10.5 以下の4つの問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) (1) で求めた行列 A の行列式を求めよ.

(3) (1) で求めた行列 A の逆行列を求めよ.

(4) (1) で求めた行列 A と行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$ について, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立するように, a と b を定めよ.

(群馬大類 24) (固有番号 s241504)

10.6 x, y を実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 17 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, A の行列式を $|A|$ で表す.

x, y が条件 $|A| = 0$ を満たすとき, 点 (x, y) の描く図形を求めよ.

(茨城大類 24) (固有番号 s241705)

10.7 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(山梨大類 24) (固有番号 s241803)

10.8 次の行列式を計算しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

(新潟大類 24) (固有番号 s242013)

10.9 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

- (1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい。
 (2) 実数 x, y, s, t に対して,

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

が成り立つとき, s, t を x, y で表しなさい.

- (3) 前問で得られた式を $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表す行列 B を求めなさい.

(長岡技科大類 24) (固有番号 s242103)

10.10 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ とする. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ に対して, 次を示せ.

- (1) 行列式

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$$

が 0 でないならば, \mathbf{a}, \mathbf{b} は 1 次独立である.

- (2) 上の行列式が 0 ならば, \mathbf{a}, \mathbf{b} は 1 次従属である.

(金沢大類 24) (固有番号 s242204)

10.11 空間のベクトル $\vec{a} = (2, -3, 1), \vec{b} = (3, -1, -2), \vec{c} = (-1, 2, -2)$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ ($0 < \theta < \pi$) を求めよ.
 (2) \vec{a} と \vec{b} ととも直交する長さ 1 のベクトルを求めよ.
 (3) \vec{a}, \vec{b} を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.
 (4) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

(静岡大類 24) (固有番号 s242505)

10.12 次の行列式 D の値を求めよ.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

(岐阜大類 24) (固有番号 s242603)

10.13 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

- (2) 次の行列が逆行列をもつときの x の条件を求めよ. また, そのときの逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大類 24) (固有番号 s242901)

10.14 次の (a), (b) の行列式の値をそれぞれ求めよ.

$$(a) \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.04 & -0.008 \\ -0.2 & 1.04 & 0.008 & 0.0016 \\ -0.04 & 0.008 & 1.0016 & 0.00032 \\ -0.008 & 0.0016 & 0.00032 & 0 \end{vmatrix}$$

(神戸大類 24) (固有番号 s243801)

10.15 行列と行列式に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 次の行列式の値を計算せよ.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) (1) の行列 A の逆行列を求めよ.

(鳥取大類 24) (固有番号 s243902)

10.16 点 O を原点とする直交座標系 (x, y, z) において, 位置ベクトル, $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{j} + \vec{k}$ が与えられている. 以下の問いに答えなさい. なお, \vec{i} , \vec{j} および \vec{k} はそれぞれ x , y および z 方向における単位ベクトルを表す.

(1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を計算せよ.

(2) ベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} および \overrightarrow{OC} を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

(鳥取大類 24) (固有番号 s243903)

10.17 関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ により定める, ただし, $|\cdot|$ は行列式を表す. 以下の問いに

答えよ.

(1) $f(x)$ は実数 β, a, b, c を用いて $f(x) = \beta(x-a)(x-b)(x-c)$ と表せる. β, a, b, c を求めよ. ただし, $a > b > c$ とする.

(2) $g(x) = -x(2x-3)(x-3)$ とするとき, 方程式 $f(x) + g(x) = 0$ の解はすべて実数で, $-1 < x < 3$ の範囲に存在することを示せ.

(九州大類 24) (固有番号 s244708)

10.18 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(佐賀大類 24) (固有番号 s244918)

10.19 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 6 & 13 \\ 10 & 5 & 7 & 21 \end{vmatrix}$$

(島根大類 24) (固有番号 s245803)

10.20 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246401)

11 連立方程式

11.1 a を実数とし $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & a \\ 0 & 2-a & -2+a \\ 2 & 4-a^2 & a^2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2-a \\ 10+3a-a^2 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) 連立 1 次方程式 $Ax = b$ が解をもつような a の値を求めなさい.
- (2) a を (1) で求めた値とするととき, 連立 1 次方程式 $Ax = b$ を解きなさい.

(東京農工大類 24) (固有番号 s240903)

11.2 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ. ただし, a は定数とする.

- (1) A の階数 (rank A) を求めよ.
- (2) A が正則行列であるための定数 a に対する条件を求めよ.
- (3) 方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ の他にも解をもつための定数 a に対する条件を求め, その条件のもとで一般解を求めよ.

(高知大類 24) (固有番号 s244503)

11.3 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする.

- (1) 行列 A の階数を求めよ.
- (2) 連立方程式 $Ax = 0$ の一般解を求めよ.

(佐賀大類 24) (固有番号 s244904)

11.4 次の連立 1 次方程式を掃き出し法 (消去法) で解きなさい.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 5y - z = 8 \\ -2x - y + 11z = 18 \end{cases}$$

(佐賀大類 24) (固有番号 s244916)

11.5 下記の X, Y の連立方程式において, X, Y ともに 0 以外の解が存在するための ω の値を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 500 - \omega & -200 \\ -200 & 200 - \omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245423)

11.6 3次正方行列 X を以下のように定義する.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以下の設問に答えよ. ただし, tX は X の転置行列を表す.

- (1) $x_{11} = 1$ とする. 積 $X {}^tX$ を計算せよ.
- (2) $x_{11} = 1$ とする. $(X {}^tX)^{-1}$ の行列式の値を求めよ.
- (3) $x_{11} = 1$ とする. X の階数を求めよ.
- (4) $x_{11} = 1$ とする. X^2 の行列式の値を求めよ.
- (5) $x_{11} = -7$ とする. 以下の命題が真か偽かを示せ.
命題「任意の a に対して, 方程式 $Xy = a$ の解 y が存在する.」
ただし, 以下のように, a と y は3次元ベクトルとする.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(島根大類 24) (固有番号 s245802)

11.7 次の3つの方程式を同時に満足する x, y, z が $x = y = z = 0$ 以外にあるように k の値を決めよ.

$$x + 3y - 2z = 0, \quad x + y + (k + 5)z = 0, \quad 3x + (k + 7)y + 4z = 0$$

(滋賀県立大類 24) (固有番号 s246003)

12 線形変換

12.1 3次元幾何ベクトル空間において,

$$\text{平面 } A : x + y + mz - 1 = 0$$

$$\text{平面 } B : x + my + z - 3 = 0$$

$$\text{平面 } C : mx + y + z - 2m = 0$$

を考える. ただし, m は実定数とする.

- (1) 3平面が一点でのみ交わる条件を求めよ.
- $m = 0$ のとき, 以下の (2) から (5) の問いに答えよ.
- (2) 平面 A , 平面 B , 平面 C の交点を求めよ.
- (3) 平面 A と平面 B の交線 L と平行なベクトル a_1 を求めよ.
- (4) 平面 C を張る2つの線形独立 (一次独立) なベクトル a_2, a_3 を求めよ.
- (5) 3次元空間中の任意の点を交線 L と平行に平面 C 上へ射影する線形変換を表す行列 Q を求めよ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241302)

12.2 縦軸を y とし, 横軸を x とする座標系でベクトル $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ が $\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1$ 上の点であるとする.

$$y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ として, ベクトル } x \text{ を } y = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} x \text{ で一次変換する.}$$

- (1) 一次変換後の y の関係式を求めよ。
 (2) 一次変換後の x_2 と y_2 の関係が表す形を描け。

(福井大類 24) (固有番号 s242413)

- 12.3 円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の直交座標系の点 $P(x, y)$ は、つぎの 1 次変換 f によって、円 $u^2 + v^2 = 16$ 上の点 $Q(u, v)$ に移される。以下の問いに答えよ。

$$f : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (1) 点 $P(x, y)$ の座標を、偏角 θ を用いて表せ。ただし、偏角とは原点 O を円の中心として、半直線 OP と x 軸の正方向とのなす角である。
 (2) $a (> 0)$ の値を求めよ。
 (3) 点 $P(x, y)$ が上記の 1 次変換 f によって点 $Q(0, 4)$ へ移されたとき、点 $P(x, y)$ の座標を求めよ。

(豊橋技科大類 25) (固有番号 s252704)

- 12.4 (x, y, z) 空間における平面 $2x + 3y + 4z + 6 = 0$ を、線形写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

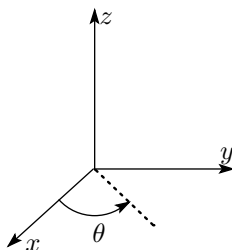
によって写して得られる (X, Y, Z) 空間の図形の方程式を求めよ。

(名古屋工業大類 25) (固有番号 s252905)

- 12.5 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ の定める平面の一次変換において、原点を通る不動直線が 1 本のみ存在する場合の a の値を求めよ。ただし、不動直線とは「その像がもとの直線と一致する直線」のことである。

(三重大類 24) (固有番号 s243113)

- 12.6 下図に示すように、3次元実ベクトル空間における直交座標系を考える。 z 軸回りの回転については、回転角 θ の正の方向を、下図の矢印の方向とする。また、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。



- (1) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す xy 平面に平行な移動 $x' = x + az$, $y' = y + bz$, $z' = z$ を考える。このとき、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ。

- (2) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える。このとき,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ。

- (3) 問い(1),(2)における行列 A, B に関して, 行列式 $|AB|$ を求め, $(AB)^{-1}$ が存在することを示せ。
 (4) 問い(1),(2)における行列 A, B に関して, $(AB)^{-1}$ を求めよ。
 (5) 問い(1),(2)における行列 A, B に関して, $AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ。

(大阪大類 24) (固有番号 s243504)

13 固有値とその応用

13.1 以下の設問に答えよ。途中の計算結果を詳しく記述すること。

- (1) k を任意の実数とするととき, 次のベクトルの組 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ が一次独立となる条件を求めよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (2) $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ とする。また, $k = 0$ とするとき, 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
 (3) A^n (n は自然数) を求めよ。

(北海道大類 24) (固有番号 s240101)

13.2 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問いに答えなさい。

- (1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい。
 (2) 行列 B, C と 2 次の単位行列 E に関して $BC = E$ が成り立つとき, 行列 C を求めなさい。
 (3) 行列 B の固有値と固有ベクトルを求めなさい。
 (4) 行列 B を対角化しなさい。

(岩手大類 24) (固有番号 s240302)

13.3 3 次対称行列 A および 3 次元ベクトル $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を用いて表される 2 次形式

$$f(\mathbf{m}) = {}^t \mathbf{m} \mathbf{A} \mathbf{m} = 5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 4yz + 8xz$$

を考える。ここで, 左上付き添字 t は転置を表す。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) A を求めよ。
 (2) (1) で求めた A の固有値を求めよ。また, 各固有値の重複度を答えよ。
 (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ。また, この P を用いて A を対角化せよ。

- (4) 3次元ベクトル $n = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ を考える. (3) で求めた P を用いて変数変換 $m = Pn$ を行い, $f(m)$ の標準形を求めよ.

(東北大類 24) (固有番号 s240502)

13.4 以下の各問いに答えよ.

- (1) t を実数とする. 行列

$$A = \begin{pmatrix} t & -t-1 & -1 \\ t-1 & -t & -1 \\ 3-2t & 2t+3 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を求め, 各固有値に対する固有空間の次元が t の値によってどのように変わるかを答えよ. また, この行列が対角化可能となるような t の値を求め, そのとき $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を一つ求めよ.

- (2) n を自然数, A を n 次実正方行列とする. 以下では i は自然数, $r(X)$ は行列 X の階数を表すものとする.

- (a) $r(A^i) \geq r(A^{i+1})$ となることを示せ.
 (b) $r(A^i) = r(A^{i+1})$ のとき, $r(A^{i+1}) = r(A^{i+2})$ となることを示せ.
 (c) $r(A^n) = r(A^{n+1})$ となることを示せ.

(お茶に水女子大類 24) (固有番号 s240602)

13.5 次の行列 A, B, C について, 固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大類 24) (固有番号 s240608)

- 13.6 行列 A を $A = \begin{bmatrix} x & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ y & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする. ただし, x と y は実数とする.

以下の問いに答えよ. なお, tX を X の転置行列とすると, $X = -{}^tX$ を満たす X を交代行列と呼ぶ. また, $X = {}^tX$ を満たす X を対称行列と呼ぶ.

- (1) A は交代行列と対称行列の和で表すことができる. 交代行列を T , 対称行列を S とするとき, T と S を求めよ.
 (2) T は正則か否かを示せ.
 (3) $x = y = 0$ のとき, T の固有値を求めよ.

- (4) 行列 B を $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & y & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x - \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする.

$y \neq 0$ のとき, A は正則でなく, B は正則であった. このとき, x を求めよ.

(東京大類 24) (固有番号 s240705)

13.7 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ.

(東京工業大類 24) (固有番号 s240803)

13.8 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.
- (3) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような3次正則行列 P と対角行列 B を1組求めよ.

(電気通信大類 24) (固有番号 s241001)

13.9 以下の行列 A について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A の固有ベクトルを求めよ.
- (3) $A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(横浜国立大類 24) (固有番号 s241101)

13.10 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 A の固有値を全て求めなさい.
- (2) (1) で求めた固有値に対応する大きさ(長さ)1の固有ベクトル p_1, p_2 をそれぞれ求めなさい.
- (3) $P = (p_1 \ p_2)$ としたとき, $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ を計算することによって, P が直交行列であることを確認しなさい. ただし, I は単位行列とする.
- (4) $P^{-1}AP$ を計算して, 行列 A を対角化しなさい.

(千葉大類 24) (固有番号 s241202)

13.11 2次曲線 $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 4x - 4\sqrt{3}y - 12 = 0$ を ${}^t xAx + 2{}^t bx - 12 = 0$ と表すことにする.

ここで, $A = \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$, ${}^t b = (-2 \quad -2\sqrt{3})$, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ${}^t x = (x \ y)$

である. この2次曲線について以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有値 a_1, a_2 ($a_1 < a_2$) とその各々に対応した正規化された固有ベクトル p_1, p_2 を求めよ.

- (2) p_1 と p_2 を並べて作った 2 次の正方行列を $P = (p_1 \ p_2)$ とする.

$${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ を示せ.}$$

- (3) 前問で作った P を使って座標変換 $x = Px'$, $x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を行くと, この 2 次曲線は

$${}^t x' {}^t PAP x' + 2 {}^t b P x' - 12 = 0 \text{ と書ける. この式を } x', y' \text{ を使って表せ.}$$

- (4) さらに, 座標の平行移動 $x' = X + c$ を行って, この 2 次曲線を標準形で表せ.

$$\text{ここで, } X = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ である. } c_1, c_2 \text{ の値も答えよ.}$$

- (5) XY 平面上にこの 2 次曲線の概形を描け. さらに, その図中に $x'y'$ 座標軸および xy 座標軸も描き加えよ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241312)

- 13.12 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 固有値 λ_1, λ_2 と, それに対応する固有ベクトル a_1, a_2 を一組求めよ.
 (2) 固有ベクトル a_1, a_2 を並べて作った行列を $P = [a_1 \ a_2]$ としたとき, $P^{-1}AP$ を求めよ.
 (3) A^n を求めよ.

(埼玉大類 24) (固有番号 s241404)

- 13.13 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする. 以下の各問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有値 λ をすべて求めよ.
 (2) A を直交行列によって対角化せよ.
 (3) ベクトル x の長さを 1 とする. ${}^t x A x$ の値が最大となる x を求めよ. ${}^t x$ は x の転置を表す.
 (4) n を自然数とするととき, A^n を求めよ.

(茨城大類 24) (固有番号 s241701)

- 13.14 次の問に答えなさい.

- (1) 次の行列 A の固有値とその固有ベクトル空間を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

- (2) 上の行列 A は対角化可能か否かを判定し, 対角化可能ならば A を対角化しなさい.

(山梨大類 24) (固有番号 s241804)

- 13.15 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

とおくとき, 以下の問に答えよ.

- (1) A と B が可換であることを示せ.

- (2) A の固有値 λ に属する固有ベクトル v に対し, Bv も A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ.
- (3) A, B, C それぞれの固有値と固有ベクトルを求めよ.

(信州大類 24) (固有番号 s241902)

13.16 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の設問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有方程式を求めよ.
- (2) 行列 A の固有値を全て求めよ.
- (3) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(新潟大類 24) (固有番号 s242002)

13.17 実行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+1 & a \end{pmatrix}$ が固有値をただ 1 つ持つための条件を求めよ. また, そのときの固有値および固有ベクトルを求めよ.

(新潟大類 24) (固有番号 s242007)

13.18 a を実数とする. このとき, 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ について, 以下の間に答えよ.

- (1) A の階数 (rank) を求めよ.
- (2) A が対角化可能であるかどうか理由をつけて答えよ. また, A が対角化可能であるとき, A を対角化せよ.
- (3) $a = \sqrt{2}$ のとき, $A^{-1} = bE_3 + cA + dA^2$ となる実数 b, c, d を求めよ. ただし, A^{-1} を A の逆行列, E_3 を 3 次単位行列とする.

(新潟大類 24) (固有番号 s242010)

13.19 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A\vec{p}_i = \lambda_i\vec{p}_i, |\vec{p}_i| = 1 (i = 1, 2, 3), \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

とする. ここで, $|\vec{p}|$ はベクトル \vec{p} の長さとする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ.
- (2) $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ を求めよ.
- (3) $\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} |A^n \vec{x}| = \infty$ となるための x_1, x_2, x_3 の条件を述べよ.

(金沢大類 24) (固有番号 s242201)

13.20 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & r \\ r & 1-2r & r \\ r & r & 1-2r \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ. ただし $r > 0$ とする.

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

を因数分解した形で求めよ.

(2) A の固有値, および対応する固有空間を求めよ.

(3) \mathbf{R}^3 の点列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_{n+1} = Ax_n \quad (n \geq 1)$$

により定める. $\{x_n\}$ が収束するための r の条件, およびそのときの $\{x_n\}$ の極限を求めよ.

(金沢大類 24) (固有番号 s242205)

13.21 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする. このとき

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A のゼロではない固有値及びゼロではない固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) で求めた 2 つの固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列 P の逆行列 P^{-1} , 及び $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(富山大類 24) (固有番号 s242304)

13.22 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で, 最大の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大類 24) (固有番号 s242421)

13.23 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$ (ケーリー・ハミルトンの定理) が成り立つことを示せ.

(3) 上の結果を利用して, A の逆行列を求めよ.

(福井大類 24) (固有番号 s242422)

13.24 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有空間を求めよ. さらに, 直交行列を用いて A を対角化できるならば直交行列を求め対角化せよ. できないならばその理由を述べよ.

(静岡大類 24) (固有番号 s242506)

13.25 次の行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(岐阜大類 24) (固有番号 s242604)

- 13.26 行列要素がすべて実数である正方行列 A に、0 ではない実数である一つの固有値 μ があるとする。一つの固有値には少なくとも一つの固有ベクトルがある。そこで、ベクトル y を固有値 μ に対応する固有ベクトルとする。任意のベクトル x において、ベクトルの各成分をそれに共役な複素数に置き換えて得られるベクトルを x^* と表すことにする。ベクトル y^* は固有値 μ に対応する固有ベクトルであることを示せ。さらに、固有値 μ に対応する固有ベクトルで、ベクトルの成分がすべて実数であるベクトルが少なくとも一つはあることを示せ。

(豊橋技科大類 24) (固有番号 s242703)

13.27 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 逆行列 A^{-1} を求めよ。
- (2) $Ax = b$ を満足するベクトル x の大きさ (長さ) $|x|$ を求めよ。
- (3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ。ただし、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ とする。
- (4) n を正の整数 ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき、 A^n を求めよ。

(豊橋技科大類 25) (固有番号 s252705)

- 13.28 次の行列 A と P について、問 (1) と (2) に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値を求めよ。
- (2) (1) で求めた固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$) とする。このとき行列 P が直交行列で、かつ次を満たすように a, b, c を求めよ。

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大類 24) (固有番号 s242902)

- 13.29 行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -7 \\ -2 & 9 & -4 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ。(すなわち、正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと、そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ。)

(名古屋工業大類 25) (固有番号 s252906)

- 13.30 3 次行列 X が方程式 $A^*X = A^{-1} + 2X$ を満たす。ただし、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^* = \text{adj} A \text{ は行列 } A \text{ の余因子行列である。このとき、次の問いに答えよ。}$$

- (1) 方程式 $(|A|I - 2A)X = I$ が成立することを証明せよ。ここで、 $|A|$ は行列 A の行列式であり、 I は 3 次単位行列である。
- (2) 行列 X を求めよ、
- (3) X の固有値を求めよ、

13.31 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) A を対角化せよ.
- (3) A^n を求めよ.

(三重大類 24) (固有番号 s243101)

13.32 (1) 次の交代行列 A (i 行 j 列成分 a_{ij} と j 行 i 列成分 a_{ji} が $a_{ij} = -a_{ji}$ を満たす行列) の行列式, 固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) 以下の交代行列 B の行列式は $|B| = p^2$ とかける. p を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

- (3) n 行 n 列の正方行列 C が交代行列であり n が奇数のとき, 行列式 $|C|$ は 0 となることを示せ.

(三重大類 24) (固有番号 s243108)

13.33 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値および, 固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(三重大類 24) (固有番号 s243120)

13.34 次の実対称行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ.
- (2) 行列 A の固有値を求めよ.
- (3) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ. なお, 固有ベクトルは規格化すること.
- (4) 行列 A は, 直交行列 V とその転置行列 V^T を以下のように左右からかけることにより, 対角行列 B に変換することができる.

$$B = V^T A V$$

行列 V と B を求めよ.

(奈良女子大類 24) (固有番号 s243205)

13.35 E を 3 次の単位行列とし, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ とおく.

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の実固有値のうちで最小のものを λ とする. λ に対する固有ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 1 つ求めよ.

- (3) $B = A^7 + 5A^4 + E$ とおく. (2) で求めたベクトル \vec{v} が B の固有ベクトルになることを示し, \vec{v} に対する B の固有値を求めよ.

(京都工芸繊維大類 24) (固有番号 s243401)

- 13.36 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}, \{y_n\}$ が, 行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -30 & 11 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

と定義される. ここで n は自然数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) PAP^{-1} を求めよ.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) 第 n 項が $c_n = 2^n b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ならびに $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ.

(大阪大類 24) (固有番号 s243501)

- 13.37 以下の設問に答えよ.

- (1) 実数を要素とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が異なる固有値を有するための条件を求めよ. また, そのとき, 異なる固有値に対する固有ベクトルが直交することを示せ.
- (2) 2次曲線 $7x^2 - 4xy + 7y^2 = 9$ の概形を描け.
- (3) $x^2 + y^2 = 1$ のとき, 関数 $f(x, y) = 2x^2 + dxy + 3y^2$ の最大値と最小値を求めよ. ただし, d は実数の定数とする.

(大阪大類 24) (固有番号 s243506)

- 13.38 次の行列で表される線形変換 T の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; T)$ をすべて求めよ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(神戸大類 24) (固有番号 s243803)

- 13.39 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) A の逆行列を求めよ.
- (2) A の固有値をすべて求めよ.
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ.

(岡山大類 24) (固有番号 s244003)

- 13.40 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ. すなわち, $P^{-1}AP = D$ を満たす正則行列 P および対角行列 D を一組求めよ.

(広島大類 25) (固有番号 s254103)

- 13.41 次の 3 次正方行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値をすべて求めよ.
- (2) A の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.
- (3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.
- (4) (3) で求めた P に対し, P^{-1} を求めよ.
- (5) (3) で求めた P に対応する D を示せ.

(広島市立大類 24) (固有番号 s244205)

- 13.42 行列 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(山口大類 24) (固有番号 s244302)

- 13.43 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2) $A = B^2$ となる行列 B をすべて求めよ.

(徳島大類 24) (固有番号 s244401)

- 13.44 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) $Ap = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる列ベクトル p の中で, 大きさ $|p|$ が最小となる p を求めよ. また, そのときの $|p|$ を求めよ.

(徳島大類 24) (固有番号 s244405)

- 13.45 2 次正方行列 A と 4 次正方行列 B を

$$A = \begin{pmatrix} -27 & 75 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -27 & 75 & 0 & 0 \\ -10 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.

- (2) B の行列式を求めよ.
- (3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (4) B の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(高知大類 24) (固有番号 s244504)

13.46 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ に対し以下の問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.
- (3) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(九州大類 24) (固有番号 s244701)

13.47 $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 2 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値を求めよ.
- (2) それぞれの固有値に対する第 2 成分が 1 の固有ベクトルを求めよ.

(九州大類 24) (固有番号 s244707)

13.48 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めよ.

(九州大類 24) (固有番号 s244709)

13.49 3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) B の固有値と, それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.
- (2) PBP^{-1} が対角行列となるような 3 次正則行列 P を求めよ.

(佐賀大類 24) (固有番号 s244906)

13.50 2 次対称な正方行列 $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ を考える. このとき, 行列 A と 2 次元のベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

を用いて, 2 次式 $f(x, y)$ を $f(x, y) = v^T A v$ と定義する. ただし, 記号 T は, 行列やベクトルの転置を示し, v^T はベクトル v の転置を示すものとする.

- (1) 行列 A の固有値, 固有ベクトル (ベクトルの大きさは 1 とする) を求めなさい.
- (2) 適当な直交行列 U により行列 A を対角化し, $U^T A U = D$ と表現する. ただし, D は 2 次対角行列とする. 行列 U と D を求めなさい.
- (3) (2) の結果を利用して, $f(x, y)$ は負の値をとらないことを証明しなさい.

(大分大類 24) (固有番号 s245108)

13.51 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

- (1) 行列 A の固有値を求めよ。
- (2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めよ。

(宮崎大類 24) (固有番号 s245303)

13.52 2×2 の正方行列: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ があるとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい。
- (2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245418)

13.53 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245436)

13.54 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (2) A を直交行列を用いて対角化せよ。

(島根大類 24) (固有番号 s245806)

13.55 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) A の固有値をすべて求めなさい。
- (2) A の各固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい。
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい。

(首都大類 24) (固有番号 s245903)

13.56 2次実対称行列について、以下の問いに答えよ。

- (1) 2次実対称行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (2) 2次実対称行列 S が正定値であるとは、すべての $x \in \mathbb{R}^2$ ($x \neq \mathbf{0}$) に対して ${}^t x S x > 0$ が成立することをいう。ここで ${}^t x$ は x の転置である。(1)の行列 B が正定値であることを示せ。
- (3) 2次実対称行列 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ の固有値をそれぞれ λ_1, λ_2 とする。行列 C が正定値となるための λ_1, λ_2 の条件を求めよ。

(はこだて未来大類 24) (固有番号 s246302)

13.57 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & -6 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大類 24) (固有番号 s246403)

13.58 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ を対角化する正則行列 P を求め、対角化しなさい.

(和歌山大類 24) (固有番号 s246501)

14 線形空間など

14.1 R は実数全体のなす集合を表す. R^N は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す.

R^4 の3つのベクトルを $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定め、これらを列にもつ行列

$$A = (a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) a, b, c が一次独立であることを示せ.
- (2) A によって定まる線形写像の像を $\text{Im}(A)$ とする. つまり

$$\text{Im}(A) = \left\{ A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in R \right\} \text{ である. } R^4 \text{ のベクトル } \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ が } \text{Im}(A) \text{ の元であると}$$

き, p を q, r, s で表せ.

- (3) $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in R^4$ の内積を

$$(x, x') = xx' + yy' + zz' + ww'$$

とする.

$x \in R^4$ が $(x, a) = (x, b) = (x, c) = 0$ をみたし, 4次行列 $\tilde{A} = (a, b, c, x)$ の行列式が1であるとき x を求めよ.

(東北大類 24) (固有番号 s240505)

14.2 R は実数全体のなす集合を表す. R^N は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す.

以下の問いに答えよ.

- (1) R^N のベクトル v_1, \dots, v_m が一次従属であるとする. このときある v_i は v_j (ただし, $j \neq i$) の一次結合であることを示せ.

- (2) V, W は \mathbb{R}^N の部分空間で $V \subset W$ をみたすとする. V の任意の基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ に対し, それをふくむ W の基底が存在することを示せ.

(東北大類 24) (固有番号 s240506)

- 14.3 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し, 線形写像ならば f を表す行列と, f の核 ($\text{Ker } f$) と像 ($\text{Im } f$) を求め, それぞれの次元を調べなさい.

(1)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

(2)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + z \\ -3x + 2z \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大類 24) (固有番号 s240607)

- 14.4 3次正方行列 A と \mathbb{R}^3 の部分空間 V を次の通りとする.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + y - 2z = 0 \right\}.$$

線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^3$) で定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) f の核 $\text{Ker } f$ の次元とその基底を1組求めよ.
- (2) V の部分空間 $V \cap \text{Im } f$ の基底を1組求めよ. ただし, $\text{Im } f$ は f の像を表す.
- (3) V の基底 $\{u, v\}$ で, $v = f(u)$ を満たすものを1組求めよ.

(電気通信大類 24) (固有番号 s241002)

- 14.5 すべての $i, j = 1, \dots, n$ に対し, 第 (i, j) 成分が第 (j, i) 成分に等しい n 次正方行列を n 次対称行列とよぶ. 行列 M の転置行列を M^T , また n 次正方行列全体からなる線形空間を $\mathcal{M}^{n \times n}$ で表すものとして, 以下の (1) ~ (4) を示せ.

- (1) 任意の $m \times n$ 行列 A に対して $A^T A$ は n 次対称行列である.
- (2) 任意の n 次正方行列 B に対して $B^T + B$ は対称行列である.
- (3) 任意の n 次対称行列 C に対し, $C = B^T + B$ を満たす行列 B が存在する.
- (4) n 次対称行列全体の集合は, $\mathcal{M}^{n \times n}$ の部分空間である.

(筑波大類 24) (固有番号 s241320)

- 14.6 3次元実ベクトル u, v と3次実正方行列 A を

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a-b & a & b \\ -a+b & -a+c & -b+c \\ a-b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$

により与える. ここに, a, b, c は実数とする.

- (1) 零ベクトル 0 と異なり, a, b, c によらない3次元実ベクトル w で, a, b, c の値にかかわらず $Aw = 0$ を満たすものを1つ求めよ.

- (2) いま求めたベクトル w に対し, u, v, w が 3 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^3 の一組の基底をなすことを示せ. また, Au, Av のそれぞれを, これら 3 つのベクトルの 1 次結合で表せ.
- (3) a, b, c によらない正則行列 P で $P^{-1}AP$ を上三角行列にするものが存在することを, 具体的に P を与え $P^{-1}AP$ を求めることにより示せ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241324)

14.7 f を集合 A から集合 B への写像とし, B の部分集合 C に対して集合 $\{x \in A \mid f(x) \in C\}$ を $f^{-1}(C)$ で表す, $A, B, C, f^{-1}(C)$ のどれも空集合でないとする. このとき, 次の (1) および (2) に答えよ.

- (1) $f(f^{-1}(C)) \subset C$ であることを示せ.
- (2) f が全射ならば, $f(f^{-1}(C)) = C$ であることを示せ.

(茨城大類 24) (固有番号 s241703)

14.8 以下の行列 A の階数を求めよ. また, 連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解空間の次元を求め, 解空間の基底を与えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(信州大類 24) (固有番号 s241901)

14.9 \mathbb{R}^2 上のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ から \mathbb{R}^2 上のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ 2x + y \end{bmatrix}$ への写像は線形写像か調べよ.

(新潟大類 24) (固有番号 s242006)

14.10 実数を成分とする 3×3 行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 8 \\ 2 & 5 & b \\ c & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

に対して, M により与えられる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + ay + 8z = 0 \\ 2x + 5y + bz = 0 \\ cx + 4y + 18z = 0 \end{cases}$$

がある. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) 上の連立 1 次方程式の解の集合が

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = y + 3z = 0\}$$

であるとき, a, b, c の値を求めよ.

- (2) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して, M は正則でない. その理由を述べよ.
- (3) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して, \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への写像 f を $f(x) = Mx$ ($x \in \mathbb{R}^3$) によって定義する. このとき, $f(\mathbb{R}^3)$ を求めよ.

(新潟大類 24) (固有番号 s242017)

14.11 \mathbb{R}^3 における 3 つのベクトル $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $\{e_1, e_2, e_3\}$ は \mathbb{R}^3 の基底であることを示せ.

(2) e_1 を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, e_2 を $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, e_3 を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への線形写像を行列で表せ.

(富山大類 24) (固有番号 s242307)

14.12 \mathbb{R}^3 の 2 組の基底 $A: (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と $B: (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ は

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と } \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

によって定義されている. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 基底 $A \rightarrow B$ の基底変換の行列 P を求めよ.

(2) ベクトル ξ の基底 $B: (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ に関する座標は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき,

ξ の基底 $A: (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ に関する座標を求めよ.

(3) 2 組の基底 $A: (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と $B: (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ に関して,
同じ座標をもつ非零ベクトル η を求めよ.

(名古屋工業大類 24) (固有番号 s242907)

14.13 2 次正方実行列 A であって ${}^tA = A$ を満たす行列全体からなる実ベクトル空間を V とする. ここで, tA は A の転置行列を表す.

(1) V は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ を基底として持つことを示せ.

(2) V の元 A に対して

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対応させる写像 f は, V 上の線形変換であることを示せ. また, f の階数を求めよ.

(岡山大類 24) (固有番号 s244004)

14.14 V を 3 次元実線形空間, W をその 2 次元部分空間とする. f は V の線形変換で, $f(W) \subset W$ を満たすとする. また, v_1, v_2 は W の基底, $v_3 \in V$ は W に属さないベクトルとする. 以下の問いに答えよ.

(1) v_1, v_2, v_3 は V の基底であることを示せ.

(2) v_1, v_2, v_3 に関する f の表現行列を A とし, A の $(3, 3)$ 成分を a とする. このとき, V の任意のベクトル v に対して, $f(v) - av \in W$ であることを示せ.

(3) a は A の固有値であることを示せ.

(4) $v \notin W$ ならば, $f(v) \neq av$ であるとする. このとき, A の固有多項式を $\Phi(t)$ とすれば,
 $\Phi(a) = \Phi'(a) = 0$ であることを示せ. ただし, $\Phi'(t)$ は $\Phi(t)$ の導関数である.

(広島大類 24) (固有番号 s244104)

14.15 ベクトル空間 \mathbb{R}^4 の部分集合 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$$

により定める.

- (1) V は \mathbb{R}^4 の部分空間であることを示せ.
- (2) V の基底を一組求めよ.

ベクトル空間 \mathbb{R}^4 上の内積を, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ に対し,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

により定める. V の直交補空間を

$$W = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 \mid \text{任意の } \mathbf{x} \in V \text{ に対し, } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \}$$

と定める.

- (3) W は \mathbb{R}^4 の部分空間であることを示せ.
- (4) W の正規直交基底を一組求めよ.

(九州大類 24) (固有番号 s244712)

14.16 写像 $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ax^2 + 2y - 2z + w \\ x - y + z + bw + c - 2 \\ 2x + (d+1)yz - w \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, f が線形写像になり, かつ核の次元が 2 となる a, b, c, d の値を求めよ.

(島根大類 24) (固有番号 s245805)

応用数学

15 応用数学

15.1 i, j, k をそれぞれ x, y, z 方面の単位ベクトルとして, 以下の設問に答えよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

- (1) 積分経路 $C : \mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$ ($t = 0$ から $t = 2\pi$) に沿った, ベクトル関数

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \text{ の線積分 } \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ を求めよ.}$$

- (2) $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}}$ ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) とし, 原点を中心とする半径が 2 の球の表面を S と表す. このとき, S 上の点 $\mathbf{p} = x_p\mathbf{i} + y_p\mathbf{j} + z_p\mathbf{k}$ における $\nabla f \cdot \mathbf{n}$ を求めよ. ただし, \mathbf{n} は \mathbf{p} における S の外向き単位法線ベクトルであり, $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$ とする.

15.2 以下の設問に答えよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

- (1) $f(x) = x$ を区間 $[-\pi, \pi]$ 上でフーリエ級数に展開した結果が

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

となることを示せ.

- (2) $-\pi \leq a \leq \pi$ を満たす任意の定数 a に対して, x の区間 $[-\pi, \pi]$ において

$$x^2 = a^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx) - \cos(na)}{n^2}$$

が成立することを示せ.

- (3) (2) の結果を用いて, x の区間 $[-\pi, \pi]$ において

$$x^3 - \pi^2 x = 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

を導け.

15.3 数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ とする. このとき, $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 β の等比数列となるような α と β をすべて求めよ.

- (2) $(n+2)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1} \cos \theta + na_n = 0$ であるとき, a_1 と a_2 を用いて a_n ($n \geq 3$) を表せ, ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする.

- (3) $a_1 = 1, a_2 = i$ (ただし $i = \sqrt{-1}$) とし, 複素平面上で原点を O , 複素数 a_n を表す点を A_n とする. a_n が (2) の式で表されるとき, 三角形 $OA_n A_{n+1}$ ($n \geq 3$) の面積を求めよ.

15.4 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

と定義する. ここで, s は $\text{Re}(s) > 1$ を満たす複素数である.

以下の問いに答えよ. ただし, 関数 $f(t)$ は $f(0) = 0$ を満たすとする.

- (1) $f'(t), e^{-t} f'(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $s, F(s)$ を用いて表せ.

- (2) $\int_0^t e^{-\tau} f'(\tau) d\tau, e^t \int_0^t e^{-\tau} f'(\tau) d\tau$ のラプラス変換を, それぞれ $s, F(s)$ を用いて表せ.

- (3) 次の微分積分方程式

$$f'(t) + e^t \int_0^t e^{-\tau} f'(\tau) d\tau = e^t$$

をラプラス変換により, s と $F(s)$ を用いて表せ.

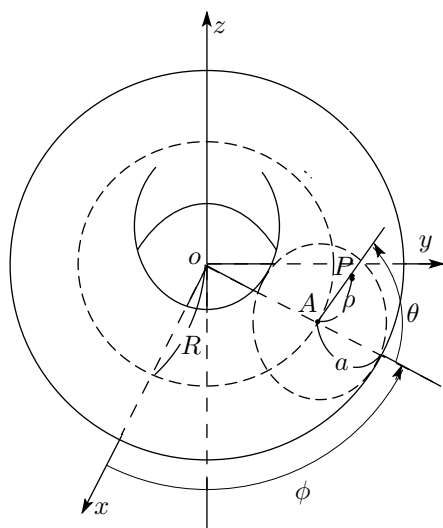
- (4) (3) の微分積分方程式の解 $f(t)$ を求めよ.

15.5 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \quad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ. ただし, \mathbf{r} は位置ベクトル, $d\mathbf{S}$ はベクトル面積素である.

- (2) 下図のように、あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり、 z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる。このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると、その断面は半径 a の円となり、この円の中心は z 軸から距離 R の円周上 (トーラス中心軸と呼ぶことにする) にある ($R > a$)。トーラス表面および内部の任意の点を P とする。点 P と z 軸とを含んだ平面と、トーラス中心軸との交点を A とする。線分 AP の長さを ρ 、 x 軸と \vec{OA} のなす角を ϕ 、 \vec{OA} と \vec{AP} のなす角を θ とする。点 P の位置ベクトル r の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ。
- (3) 同図のトーラスの表面 ($\rho = a$) においてベクトル面積素 dS を、前問 (2) の結果を用いて、 ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ。この結果を用い、変数の範囲に注意して、このトーラスの表面積を求めよ。なお円周率を π とする。
- (4) 式 (*) と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ。



(東京大類 24) (固有番号 s240703)

15.6 以下の問いに答えよ。ただし、解とともに導出過程も示せ。

- (1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

を考える。ただし、 z は複素変数、 a は複素数、 n は整数とする。複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について、以下の式が成り立つことを示せ。ここでは i を虚数単位とする。

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い。

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば、

C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると、その結果はゼロである。

- (2) 実変数 x について、以下の定積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について、以下の定積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について、以下の定積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

(東京大類 24) (固有番号 s240704)

15.7 複素関数 $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ のすべての極を極形式 ($re^{i\theta}$ の形) で表せ.

(2) α を $f(z)$ の極とすると、 $f(z)$ の α における留数が $\frac{1}{4\alpha}$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ.

(電気通信大類 24) (固有番号 s241005)

15.8 複素関数の閉曲線 C に沿っての積分

$$I = \int_C \frac{e^z}{2z-5} dz$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲線 C が $|z|=2$ の場合について I を求めよ, 導出過程も示せ.

(2) 閉曲線 C が $|z-3|=2$ の場合について I を求めよ, 導出過程も示せ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241304)

15.9 (1) 2つの複素数 $z_1 = a+bi$ および $z_2 = c+di$ を考える (a, b, c, d は実数であり, i は虚数単位である). いま, 新たな複素数 z を $z = z_1 z_2$ で定義する. このとき, $|z| = |z_1||z_2|$ であることを示しなさい.

(2) 前小問 (1) で述べた状況で, z の偏角が, z_1 の偏角と z_2 の偏角の和に等しいことを示しなさい. ただし, $a, c, ac-bd$ がいずれも 0 でないとする.

(筑波大類 24) (固有番号 s241315)

15.10 実数 x, y に対して, $z = x+iy$ とする. 複素関数 $f(z)$ を実部と虚部に分けて, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく. $u(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$ のとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2) $v(x, y)$ は, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ を満たすとする. このとき, $v(0, 0) = 3$ となるような $v(x, y)$ を求めよ.

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ.

(茨城大類 24) (固有番号 s241707)

15.11 $a = \begin{bmatrix} 1+i \\ x+iy \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ とするとき, a のノルムが 3, a と b の内積の絶対値が $\sqrt{7}$ となるよ

うな x と y の値を求めよ. ただし i は虚数単位, x, y は実数とする.

(新潟大類 24) (固有番号 s242008)

15.12 $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{b} = 3xyz^2\vec{i} + 2xy^3\vec{j} - x^2yz\vec{k}$, $\phi = e^{xyz}$ とする. 点 $P(1, -1, 1)$ において, 次の値を求めよ. ただし, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{k}$ は直交座標の単位ベクトルである.

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ (2) $\operatorname{div}(y \operatorname{grad} \phi)$ (3) \vec{a} と $\operatorname{rot} \vec{b}$ のなす角度 (4) $(\vec{a} \times \nabla)\phi$

(富山大類 24) (固有番号 s242303)

15.13 3つの複素数を $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $\gamma = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とする. ここで, i は虚数単位をあらわす. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) α, β, γ を複素平面上に図示せよ.
 (2) α^{2011} を $x + yi$ (x, y は実数) という形にあらわせ.
 (3) $\alpha^m = \beta$, $\alpha^n = \gamma$ をみたす整数 m, n があれば求めよ.
 (4) 複素平面上で α, β, γ を結んでできる三角形の内角をそれぞれ a, b, c とするとき,

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c)$$

を求めよ.

(静岡大類 24) (固有番号 s242507)

15.14 i を虚数単位とし, 複素数 α を $\alpha = (x - i)^2$, $\bar{\alpha}$ を α の共役複素数とすると, 次の (1) と (2) に答えよ.

- (1) $\alpha + \bar{\alpha} = 2$ を満たす実数 x の値を求めよ.
 (2) $\alpha \times \bar{\alpha} = 4$ を満たす実数 x の値を求めよ.

(三重大類 24) (固有番号 s243118)

15.15 次のベクトル場 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right)$$

- (1) $\nabla \cdot A$ を求めよ.
 (2) $\nabla \times A$ を求めよ.
 (3) ベクトル場 A の概形を $x - y$ 平面上に図示せよ.

ここで, ∇ は次のように定義された演算子である.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大類 24) (固有番号 s243204)

15.16 以下の問いに答えよ. ただし, u, v, w は複素数である.

- (1) 方程式 $|u + 2| = 2|u - 1|$ を満たす u が描く図形を複素平面上に図示せよ.
 (2) 方程式 $|u| = 2$ を満たす複素数 u を

$$v = u + \frac{1}{4u}$$

により変数変換する. このとき, 複素数 v が描く図形を複素平面上に図示せよ.

- (3) 方程式 $|u+2|=2|u-1|$ を満たす複素数 u を

$$w = i \left(\frac{4u^2 - 16u + 17}{4u - 8} \right)$$

により変数変換する. ただし, i は虚数単位とする. このとき, 複素数 w が描く図形を複素平面上に図示せよ.

(大阪大類 24) (固有番号 s243503)

- 15.17 C は複素平面上の円周 $\{z; |z|=4\}$, D は $\{z; |z|<4\}$ とする.

- (1) D に円周 C を付け加えた集合 $\bar{D} = C \cup D$ で正則な関数に対するコーシーの積分表示を書け.
 (2) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \cos z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2} dz$$

なおコーシーの積分表示では微分と積分が交換可能であることを用いてよい.

- (3) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \sin z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2} dz$$

(大阪大類 24) (固有番号 s243509)

- 15.18 (1)

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{\pi} - \cos(x) \right), \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき,

$$a_n, (n=0, 1, 2, \dots), b_n, (n=1, 2, \dots)$$

を求めよ.

- (2) (1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ.

(大阪大類 24) (固有番号 s243510)

- 15.19 $x = \frac{1+i}{3}$ (i は虚数単位) のとき, x^8 の値を求めよ.

(広島大類 24) (固有番号 s244108)

- 15.20 $\vec{F} = \begin{pmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の経路に沿って

$\int_{(0,0,0)}^{(X,Y,Z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ を求めよ. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, X, Y, Z$ はすべて実定数とする.

- (1) $(0, 0, 0) \rightarrow (X, 0, 0) \rightarrow (X, Y, 0) \rightarrow (X, Y, Z)$.
 (2) $(0, 0, 0)$ と (X, Y, Z) を直線上で結ぶ線分.

15.21 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < -\frac{\pi}{4}) \\ 1 & (-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}) \\ -1 & (\frac{3\pi}{4} < x < \pi) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ で定義する. 次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ. また, 関数 $y = F(\omega)$ のグラフの概形を描け. なお, T は正の実数とする.

$$f(t) = \begin{cases} a & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t > 0$ で定義されているものとし, $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ で定義するとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $f(t) = \sin \omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ であることを示せ.

(b) $f(t) = \cos \omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ であることを示せ.

(c) $f(t) = a + bt$ のラプラス変換が $F(s) = \frac{as + b}{s^2}$ であることを示せ.

(九州大類 24) (固有番号 s244704)

15.22 $\cos^2 t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大類 24) (固有番号 s245102)

15.23 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (-\pi < t < 0) \\ -1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

(大分大類 24) (固有番号 s245103)

15.24 $f(t) = \sin \omega t$ ($\omega \neq 0$ の実数) とするとき, $t \sin \omega t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大類 24) (固有番号 s245105)

15.25 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを描き, そのフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} -\pi & (-\pi < t < 0) \\ 2t - \pi & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

(大分大類 24) (固有番号 s245106)

15.26 $z = \frac{\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i}$ であるとき, $|z|$ および, $\arg z$ を求めなさい.

(鹿児島大類 24) (固有番号 s245429)

15.27 次の各問いに答えなさい.

(1) $\int e^x \cos nx dx$ を求めなさい. ただし n は正の整数とする.

(2) $\int e^x \sin nx dx$ を求めなさい. ただし n は正の整数とする.

- (3) 関数 $f(x) = e^x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) をフーリエ級数展開 $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ したとき、係数 $a_n (n \geq 0)$, $b_n (n \geq 1)$ を求めなさい。

(和歌山大類 24) (固有番号 s246507)

15.28 次の各問いに答えなさい。ただし、 i を虚数単位とする。

- (1) $\frac{3-i}{4+3i}$ の実部の値を求めなさい。
 (2) 複素数 $-1 + i\sqrt{3}$ の偏角の値を求めなさい。
 (3) 複素関数 $f(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{3}}{z^3 - z}$ について次の問いに答えなさい。
 (a) $z^3 - z = 0$ の根を全て求めなさい。
 (b) 円周 $\left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$ に反時計回りの向きを与えた経路を C とする。複素積分 $\int_C f(z) dz$ の値を求めなさい。

(和歌山大類 24) (固有番号 s246508)

確率統計

16 確率統計

16.1 A と B の二人で以下のゲームを行う。プレイごとに、 A と B のどちらか一方が 1 点を獲得するものし、 A が 1 点を獲得する確率を p とする。このプレイを繰り返し、

- A の点が B の点を 2 点上回ったとき、 A の勝利。
- B の点が A の点を 2 点上回ったとき、 B の勝利。

とする。

A が i 点、 B が j 点を獲得しているときに、 A がゲームを勝利する確率を $S(i, j)$ とする。

例えば、 $S(1, 1)$ は A, B がそれぞれ 1 点獲得しているときに、 A がゲームに勝利する確率である。また、 $S(2, 0) = 1$ であり、 $S(0, 2) = 0$ である。このとき、次の問いに答えよ。ただし、全ての自然数 n に対して、 $S(n, n) = S(0, 0)$ であることを証明せずに用いて良い。

- (1) $S(0, 0)$ と $S(1, 0)$ と $S(0, 1)$ が満たす関係式を求めよ。また、 $S(1, 0)$ と $S(1, 1)$ が満たす関係式を求めよ。
 (2) i, j を $|i - j| < 2$ を満たす非負整数とする。このとき、

$$S(i, j) = pS(i + 1, j) + (1 - p)S(i, j + 1) \quad (*)$$

 であることを示せ。
 (3) 式 (*) を利用して、 $S(0, 0)$ の値を p を用いて表せ。
 (4) $S(0, 1)$ の値を p を用いて表せ。
 (5) $S(0, 1) = 1/2$ となる p の値は、 $3/5 < p < 2/3$ を満たすことを示せ。

(東京大類 24) (固有番号 s240702)

16.2 同時確率密度関数

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(x - y) & 0 \leq y < x \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

をもつ連続な確率変数 X, Y を考える.

- (1) X, Y の周辺確率密度関数をそれぞれ求めよ.
- (2) X, Y の期待値 $E(X), E(Y)$ をそれぞれ求めよ.
- (3) X, Y の分散 $V(X), V(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(筑波大類 24) (固有番号 s241309)

- 16.3 確率変数 X は $1, 2, 3$ のいずれかの整数値をとる. また, X が整数 x をとる確率 $P(X = x)$ が次式で与えられるものとする ($x = 1, 2, 3$).

$$P(X = x) = x/6$$

このとき, X の標準偏差を求めなさい.

(筑波大類 24) (固有番号 s241314)

- 16.4 1つのさいころを 6 の目が出るまで投げ続け, 投げた回数を X とする. 以下の問いに答えなさい.

- (1) 確率 $P(X = 1), P(X = 2)$ を求めなさい.
- (2) 自然数 n に対して, 確率 $P(X = n)$ を求めなさい.
- (3) X の期待値 $E(X)$ を求めなさい.

(長岡技科大類 24) (固有番号 s242101)

- 16.5 中の見えない袋が 10 袋あり, それぞれに 10 個の玉が入っている. 袋にはタイプ A, タイプ B, タイプ C の 3 種類があり, タイプ A は 2 袋, タイプ B は 7 袋, タイプ C は 1 袋であることが分かっている. ここでタイプ A には白玉が 9 個, 赤玉が 1 個入っている. タイプ B には白玉が 7 個, 赤玉が 3 個入っている. タイプ C では白玉が 5 個, 赤玉が 5 個入っている. このとき以下の問いに答えよ. ただし答えは分数で示すこと.

- (1) 袋を無作為に一つ選び, 玉を無作為に一つ取り出す. その袋がタイプ A であり, かつ取り出された玉が白玉である確率を求めよ.
- (2) 袋を無作為に一つ選ぶ. その袋に対して, 玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行う. このとき, その袋がタイプ A であり, かつ取り出された玉が 3 回とも白玉である確率を求めよ.
- (3) 袋を無作為に一つ選ぶ. その袋に対して, 玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行う. このとき, 取り出された玉が 3 回とも白玉である確率を求めよ.
- (4) 袋を無作為に一つ選び, その袋に対して, 玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行った. 取り出された玉は 3 回とも白玉であった. このとき, この袋がタイプ C であった確率を求めよ.

(豊橋技科大類 24) (固有番号 s242701)

- 16.6 1 から 9 までの自然数を 1 つずつ書いた 9 枚のカードがある. 以下の問いに答えよ.

- (1) この 9 枚のカードから同時に 2 枚のカードを無作為に取り出す.
 - (a) 出た数字の差が 5 以下である確率を求め, 既約分数で答えよ.
 - (b) 出た数字の和が偶数である確率を求め, 既約分数で答えよ.

- (2) X と Y の二人がこの 9 枚のカードを使ったゲームを行う。司会者 Z がカードを 1 枚無作為に取り出し、1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかの数字が出たときは X の勝ち、7, 8, 9 のいずれかの数字が出たときは Y の勝ちとし、勝った方にその数字の分だけの得点が与えられる。カードを元に戻してこの対戦を繰り返し、先に 3 回勝った方を勝者とする。
- (a) X が 3 勝 1 敗で勝者となる確率を求め、既約分数で答えよ。
- (b) 最初に Y が 2 連勝したとする。この先、 Y が勝者となる確率を求め、既約分数で答えよ。
- (c) 最初に Y が 2 連勝したとする。この先、 X か Y のどちらかが勝者となった時点の X の得点合計の期待値を求め、既約分数で答えよ。

(豊橋技科大類 25) (固有番号 s252706)

- 16.7 1 から 9 までの数字が書かれたカードが 1 枚ずつ、合計 9 枚ある。 A 君と B 君がそれぞれ 1 枚ずつ、 A 君 \rightarrow B 君の順にカードを取り出すとき、次の (1) と (2) に示される確率をそれぞれ求めよ。ただし、取り出したカードはもとにもどさないものとする。

- (1) A 君が偶数のカードを取り出し、 B 君が奇数のカードを取り出す確率
- (2) B 君が取り出したカードが偶数であることが判明している時、 A 君が取り出したカードも偶数である確率

(三重大類 24) (固有番号 s243119)

- 16.8 正八面体のサイコロがある。各面には 0 から 7 までの整数のうち 1 つが書かれており、各面の数字は互いに異なる。また、このサイコロを振った時に、各面は等確率で出るものとする。このサイコロを n 回振り、出た目を順に小数点以下に並べた数を x_n とする。ただし、 x_n の整数部分は 0 とする。例えば、 $n = 4$ で、出た目が順に 5, 0, 7, 3 であるなら、 $x_4 = 0.5073$ となる。 n が 2 以上の偶数であるとき、 $x_n < \frac{8}{33}$ となる確率を p_n とする。以下の設問に答えよ。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) n が 4 以上の偶数であるとき、 p_n を p_{n-2} と n を用いて表せ。
- (3) p_n を求めよ。

(大阪大類 24) (固有番号 s243507)

- 16.9 X と Y を平均を 0 とする確率変数とし、その線形結合を $Z = aX + bY$ とおく。ただし、 a と b は $a^2 + b^2 = 1$ を満たす定数である。 X^2 , Y^2 , XY の期待値を $E[X^2] = 1$, $E[Y^2] = 1$, $E[XY] = \rho$ とおく。ただし $\rho > 0$ とする。以下の設問に答えよ。

- (1) Z^2 の期待値 $E[Z^2]$ を最大にする (a, b) の組み合わせ (a_1, b_1) と最小にする (a, b) の組み合わせ (a_2, b_2) を求めよ。
- (2) 問 (1) で求めた (a_1, b_1) と (a_2, b_2) に対して期待値 $E[(a_1X + b_1Y)^2]$ と $E[(a_1X + b_1Y)(a_2X + b_2Y)]$ を求めよ。

(大阪大類 24) (固有番号 s243511)

- 16.10 試行毎の確率 p 、試行回数 N の二項分布 $P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$ は、 $p \ll 1$, $n \ll N$ の場合に平均値 $s = Np$ のポアソン分布 $P(n) = \frac{1}{n!} s^n e^{-s}$ に近づくことを示せ。必要なら $e^{-p} \approx 1-p$ ($p \ll 1$) を用いてよい。

(広島大類 25) (固有番号 s254105)

- 16.11 赤い玉が p (ただし、 $0 < p < 1$) の割合で、青い玉が q (ただし、 $0 < q < 1-p$) の割合で入っている箱がある。ここから玉を毎回一個取り出し、玉の色を確認した後すぐに玉を元の箱に戻すことにする。次の各問いに答えなさい。

- (1) 最初に赤い玉が取り出され、次に青い玉が取り出される確率を求めなさい.
- (2) $p = 0.2$, $q = 0.3$ のときに、取り出した玉の色が順に『赤青青赤青』となる確率を求めなさい.
- (3) 3回玉を取り出したとき、玉の色が全て異なり、しかも赤い玉と青い玉が含まれている確率を求めなさい.

(和歌山大類 24) (固有番号 s246509)