大学編入学試験問題集（数学）

《類題作成　碓氷軽井沢 IC 数学教育研究所》

2018 年 3 月

目 次

基礎数学

1　基礎数学

1.1　(1)　次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2)　次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ について，以下の問に答えよ.

$$b_{n+2} = |b_{n+1} - b_n| \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，b_1 と b_2 は正の整数とする.

(a) $b_1 = 21$, $b_2 = 27$ のとき，b_3, b_4, b_5, b_6 を求めよ.

(b) b_1 と b_2 が正の整数 d の倍数であるとき，b_n も d の倍数であることを数学帰納法により証明せよ.

(3)　次の条件を満たす数列 $\{c_n\}$ について，以下の問に答えよ.

$$-1 < c_1 < 0, \qquad c_{n+1} = \frac{2}{1 - c_n} - 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(a) $c_1 = -1/2$ のとき，c_2 を求めよ.

(b) $-1 < c_n < 0$ となることを数学帰納法により証明せよ.

(c) 数列 $\{c_n\}$ が単調減少列となることを示し，さらに数列 $\{c_n\}$ の $n \to \infty$ の極限を求めよ.

(東北大類 29)　　(固有番号 s290503)

1.2　$\dfrac{3}{(\sqrt{2})^x} + \dfrac{5}{2^x} = 2$ を x について解け.

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292014)

1.3　四角形 $ABCD$ は，円に内接し，$AB = 6$, $BC = CD = 3$, $\angle D = 60°$ である．この四角形 $ABCD$ の面積を求めなさい.

(山口大類 29)　　(固有番号 s294303)

1.4　(1)　i は虚数単位とする．$\dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$ の実部と虚部を求めよ.

(2)　$0 < x < 1$ のとき，方程式 $\log_3 x - 3\log_x 9 + 1 = 0$ を解け.

(3)　不等式 $\sin 2\theta > \sin\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ.

(富山県立大類 29)　　(固有番号 s297101)

1.5　条件 $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ $\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ.

(1)　a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ.

(2)　一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ.

(3)　正の整数 n に対して，不等式 $a_n < a_{n+1} < 1$ が成り立つことを証明せよ.

(富山県立大類 29)　　(固有番号 s297102)

微分積分 I

2　微分

2.1　関数 $y = e^{-x}\sin x$　（ただし，$0 < x < 2\pi$ の範囲で考える）について次の問 (1)，(2) に答えよ．

(1)　y' および y'' を計算せよ．

(2)　y'，y'' の符号を調べ，増減・凹凸がはっきりわかるようにグラフを描け．

(北見工業大類 29)　　(固有番号 s290204)

2.2　次の極限を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$　（e は自然対数の底である.）

(秋田大類 29)　　(固有番号 s290402)

2.3　$a \neq 0$ とし，$f(x)$ を $x = 0$ のまわりで定義された関数とする．

$$(*)\qquad \lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$$

が存在するために $f(x)$ が満たすべき条件を求めよ．また $(*)$ が存在するための条件を $f(x)$ が満たす時，$(*)$ の値を求めよ．

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290601)

2.4　極限値を求めよ．　(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}$

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290609)

2.5　$x = \sin x$ を満たす x の実数解はいくつあるか答えよ．　またその根拠も示せ．

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290610)

2.6　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　（ただし，a，$b>0$）が下に図示されている．点 A の座標は $(a, 0)$，点 B の座標は $(0, b)$ であり，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は楕円の弧 AB（第一象限）上の点（ただし，点 A と点 B を除く）である．次の設問に答えなさい．

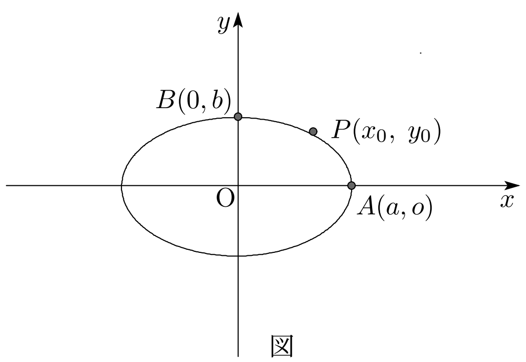
(1)　点 P で楕円に接する接線の方程式を x，y，a，b，x_0，y_0 を用いて表しなさい．

(2)　$x_0 = a\cos\theta$，$y_0 = b\sin\theta$　（ただし，$0 < \theta < \pi/2$ ）とおいたとき，設問 (1) で求めた接線の方程式を x，y，a，b，θ を用いて表しなさい．

(3)　設問 (2) で求めた接線の方程式と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ点 C および点 D とするとき，線分 CD の長さを a，b，θ を用いて表しなさい．

(4)　線分 CD の長さが最小となる θ の値を a，b を用いて表しなさい．

(5)　線分 CD の最小値を a，b を用いて表しなさい．



図

(千葉大類 29)　　(固有番号 s291207)

2.7 次の関数を x について微分せよ.

(1) $y = \dfrac{\sin 3x}{1+\cos 3x}$　　(2) $y = e^{\frac{x}{\tan x}}$

(埼玉大類 29)　　(固有番号 s291401)

2.8 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$ を求めよ.

(2) 実数 p, q は，$p > 1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たすとする．このとき，$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ を満たすすべての実数 a, b に対して，不等式　$ab \leqq \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$　が成り立つことを示せ.

(信州大類 29)　　(固有番号 s291901)

2.9 3 次関数 $f(x)$ は $x=1$ で極小値 0，$x=3$ で極大値 32 をとる．このときの $f(x)$ を求めよ.

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292009)

2.10 次の (a)〜(c) の関数を x で微分せよ.

(a) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$　　(b) $y = \sqrt{x}\log_e x \quad (x>0)$　　(c) $y = x^{\log_e x} \quad (x>0)$

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292012)

2.11 座標平面上の 3 点 $A(-2,\ 0)$，$B(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$C(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$ の線分 AC の長さ $\overline{AC}$ と線分 BC の長さ $\overline{BC}$ の和 $\overline{AC}+\overline{BC}$ の最大値を $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で求めよ.

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292015)

2.12 関数　$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x>0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$　について，次の問いに答えよ.

(1) $x>0$ に対し，$f'(x)$ と $f''(x)$ を計算せよ.

(2) 正の整数 n に対し，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} y^n e^{-y} = 0$ を示せ.

(3) $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ であることを示せ.

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292207)

2.13 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと.

(1) $\dfrac{d}{dx}x^{\sin x} \quad (x>0)$　　(2) $\dfrac{d^5}{dx^5}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) \quad (x \neq 1)$

(富山大類 29)　　(固有番号 s292301)

2.14 次の極限を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)-2x}{x^2}$

(岐阜大類 29)　　(固有番号 s292601)

2.15 次の関数の与えられた範囲内での最大値と最小値を求めなさい．ただし，log の底は e とする.

$y = \dfrac{4\log x}{3x} \quad (x \geqq 1)$

(三重大類 29)　　(固有番号 s293104)

2.16 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{4\sqrt[4]{x}-2x^{-2}+x}{3x}$　　(2) $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$　　(3) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$

(三重大類 29)　　(固有番号 s293109)

2.17 (1) 関数 $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ を x で微分せよ.

(2) 関数 $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ を考える．ここで，ω_0, γ は正の実定数とする．以下の問いに答えよ;

(a) 極限値 $\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)$ を求めよ．

(b) $\omega > 0$ の範囲で，$f(\omega)$ が極大をもつために満たすべき ω_0 と γ に対する条件式を求めよ．またその時の ω を求めよ．

(奈良女子大類 29)　　(固有番号 s293204)

2.18 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ を求めよ．

(京都工芸繊維大類 29)　　(固有番号 s293402)

2.19 xy 平面上において，θ を変数として，座標 x, y が，$x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ で与えられる曲線を，サイクロイドと呼ぶ．ここで，a は定数である．$\theta \geq 0$ におけるこの曲線上で，x 軸に対する曲線の傾きが 0 となる点 $(x,\ y)$ のうち，原点 $(x = 0,\ y = 0)$ に最も近い点を $(x_1,\ y_1)$, 2 番目に近い点を $(x_2,\ y_2)$, $\cdots$, n 番目に近い点を $(x_n,\ y_n)$ とする．x_n, y_n を求めよ．

(広島大類 30)　　(固有番号 s304109)

2.20 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log\sin x$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0} (\sin x)^x$

(2) 次の関数の導関数を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$　　(b) $\tan^{-1}(2x+3)$

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294601)

2.21 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log_{10} 5x$　　(1) $y = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^4$

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294907)

2.22 次の関数を微分しなさい．

(1) $y = \dfrac{4}{3}x^6$　　(2) $y = \left(x^2+1\right)^3$　　(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(4) $y = 2e^{5x}$　　(5) $y = \sin^2 x$　　(6) $y = \ln\left(x^2+x\right)$

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294911)

2.23 関数 $f(x) = e^{-x^2}$ の増減，凹凸を調べ，曲線 $y = f(x)$ の概形を描け．ただし，e は自然対数の底である．

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294916)

2.24 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}(x^2+1)(x^3+2)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\sin x}{x}\right\}$

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295401)

2.25 次の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dt}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295406)

2.26 曲線 $y = xe^{-2x} + 1$ の点 $P(0,1)$ における接線の方程式を求めよ．

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295412)

2.27 次の関数を x で微分しなさい.

$$y = x^{\log_e(x)} \qquad (x > 0)$$

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295416)

2.28 関数 $y = |x|$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $x = 0$ における微分係数を示す式について以下の a, b, c から適切なものを選択せよ.

a) $\lim_{x \to 0} |x|$　　b) $\lim_{x \to 0} x$　　c) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

(2) x が 0 においては微分不可能であることを説明せよ.

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295421)

2.29 以下の微分を計算せよ.

$$\frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}\left(x^2 - 1\right)\right\} \qquad \left(0 < x < \sqrt{2}\right)$$

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295507)

2.30 閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能である関数 $f(x)$ に対して，次の命題（平均値の定理）が成り立つ.

ある $c(a < c < b)$ が存在して

$$(*) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = x^2$ のとき，区間 (a, b) において，$(*)$ が成り立つような c を求めよ.

(2) 閉区間 $[a, b]$ で連続かつ，開区間 (a, b) で 2 回微分可能でつねに $f''(x) > 0$ を満たす関数 $f(x)$ を考える．このとき，区間 (a, b) において関数

$$F(x) = \frac{f(b)(x - a) + f(a)(b - x)}{b - a} - f(x)$$

はつねに正であり，かつ $F(x)$ の極大値が区間 (a, b) において，ただ一つだけ存在することを示せ.

(3) $b > a > 1$ とする．次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{b^2 - a^2}{2ab} > \log\frac{b}{a}$$

(島根大類 29)　　(固有番号 s295806)

2.31 次の関数を微分しなさい．解答は答えのみでよい.

(1) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$　　(2) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$　　(3) $f(x) = \cos^{-1}(\log x)$

(首都大類 29)　　(固有番号 s295901)

2.32 次の関数を x で微分しなさい.

(1) $\frac{1}{2x + 5}$　　(2) $(x^2 + x + 5)(x^2 - x + 2)$　　(3) $\frac{(x + 1)^2}{(x + 2)^2(x + 3)^3}$　　(4) $x^2 \sin\frac{1}{x}$

(東京海洋大類 29)　　(固有番号 s296401)

2.33 関数 $f(x)$ の導関数は次のように定義される.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

この定義に従って次の関数の導関数を求めなさい．導く過程も示しなさい.

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 8$　　(2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(東京海洋大類 29)　　(固有番号 s296403)

2.34 円筒形の容器がある．上面と底面に使われている板の単位面積当たりの重量は，側面に使われている板の 2 倍である．次の問いに答えよ．但し，容器の半径を $r(cm)$，高さを $h(cm)$，重量を $W(g)$，容積を $V(cm^3)$，側面に使われている板の単位面積当たりの重量を $m(g/cm^2)$，円周率を π とする．また，板の厚みは無視できるほど薄いとする．

(1) W を r, h, m 及び π を用いて表せ.

(2) V を r, h 及び π を用いて表し，次に，W を r, V, m 及び π を用いて表せ.

(3) V を一定として，最も小さい W でこの容器を作った時の r と h の比を求めよ.

(東京海洋大類 29)　　(固有番号 s296404)

3 積分

3.1 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+6}{x^2-4}dx$　　(3) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290102)

3.2 $\displaystyle I_n = \int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$　（n は 0 または自然数，a は正の定数）とする.

以下の問いに答えなさい.

(1) $\displaystyle I_0 = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a を用いて表しなさい.

(2) $\displaystyle I_n = \int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a と n を用いて表しなさい.

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290110)

3.3 積分 $\displaystyle I = \int_1^e \frac{\log x}{x}dx$ を計算せよ.

(北見工業大類 29)　　(固有番号 s290203)

3.4 関数 $f(x) = x^2e^{-x+2}$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $y = f(x)$ の増減と極値を調べ，そのグラフをかきなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい,

(岩手大類 29)　　(固有番号 s290303)

3.5 次の積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$　（但し，$a>0$ とする．）

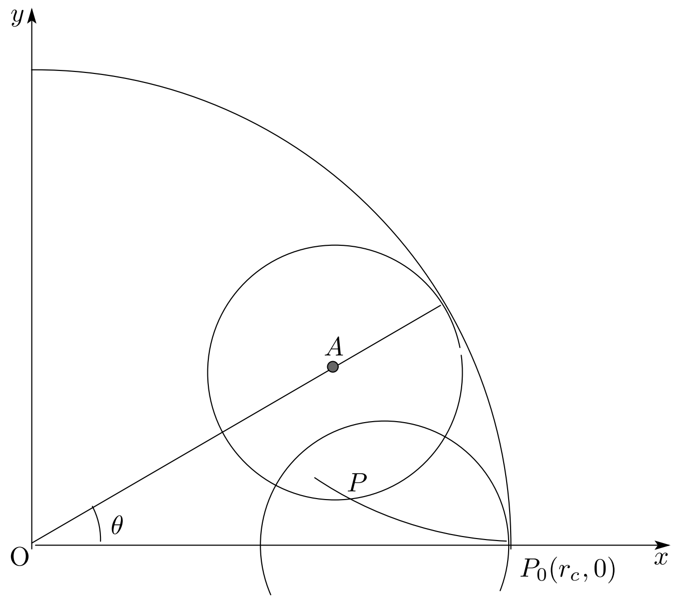
(2) $\displaystyle\int_1^e \log_e x\, dx$　（e は自然数の底である．）

(秋田大類 29)　　(固有番号 s290403)

3.6 $-\infty < a < b < \infty$ とし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で，かつ　$f(x) \geq 0$ を満たすものとする．もし　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ であるならば，$[a,b]$ 上の各点 c で $f(c) = 0$ であることを示せ.

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290602)

3.7 図のように，原点 O を中心とする半径 r_c の定円に内接しながら半径 r_m の円 A が滑らずに回転する．円 A の円周上の定点 P の軌跡である内サイクロイド曲線 C について考える．なお，$r_c \geqq 2r_m > 0$ とする．



(1) 点 P は，図中の点 $P_0(r_c, 0)$ から移動を開始したとする．このとき，回転後の円 A の中心 A と原点を結ぶ線分 OA の x 軸からの回転角を θ とするとき，r_c，r_m，θ を用いて点 P の座標を表せ．

(2) $ar_m = r_c$ と表すこととする．また，$r_c = 1$ とする．

(a) a が正の整数であるとき，この曲線 C 上の点を x 軸に関して対称に移動させた点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(b) $a = 2, 3, 4$ のときの軌跡の概形を根拠とともに示せ．

(3) $r_c = 3$，$r_m = 1$ のとき，この内サイクロイドに囲まれた部分の面積 S と内サイクロイドの長さ L を求めよ．

(東京大類 29)　　(固有番号 s290703)

3.8 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\dfrac{(\log_e x - \mu)^2}{2}\right\}$　　$(0 < x < \infty\ ;\ -\infty < \mu < \infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$ となる m を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx$ を求めよ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291316)

3.9 (1) 数列

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が単調減少であることを示せ．

(2) 上の数列が，$C \geq \dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ．

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ．ただし，$[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291317)

3.10 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{-x^2+10}{(x+1)(x-2)^2}dx$

(埼玉大類 29)　　(固有番号 s291402)

3.11 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+1}$ を求めよ．

(2) 等式 $\displaystyle\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ が x ついての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ の値を求めよ．

(信州大類 29)　　(固有番号 s291902)

3.12 $a,\ b$ は定数で $a < b$ とする．$a < p < q < b$ を満たす $p,\ q$ に対して，

$$I(p,q) = \int_p^q \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $t = \sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$ 　$(p \leqq x \leqq q)$ とおいて，置換積分法により $I(p,q)$ を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{p\to a+0}\left\{\lim_{q\to b-0} I(p,q)\right\}$ を求めよ．

(信州大類 30)　　(固有番号 s301902)

3.13 (1) 関数 $f(x) = \exp(2x)$ 上の x 座標が負である点 P における接線と， 両座標軸とで囲まれる図形の面積を S とする．点 P の x 座標を p とし，S を p で表せ．

(2) 前問 (1) において p の関数 S の最大値を求めよ．

(3) 関数 $f(x) = \exp(ax)$ とその逆関数 $g(x) = \dfrac{1}{a}\log x$ のグラフが $x = e$ で接する（すなわち，この点で接線を共有する）ように定数 $a(\neq 0)$ の値を求め，この 2 曲線と x 軸，y 軸の囲む部分の面積を求めよ．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292001)

3.14 曲線 $y = \cosh x$ の $x = 0$ から $x = 2$ までの弧の長さを求めよ．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292006)

3.15 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\ dx$

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292010)

3.16 つぎの (a)〜(c) の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+2}$　　(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$　　(c) $\displaystyle\int \log_e x dx$

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292013)

3.17 放物線 $y = -mx^2 + nx$ は第一象限で直線 $x + y = 4$ と接点 $P(t,\ -mt^2 + nt)$ で接する．ただし，$m > 0,\ n > 0$ である．次の (1),(2) に答えよ．

(1) $m,\ n$ を t の関数として表せ.

(2) 放物線と x 軸で囲まれる面積が最大になるときの $m,\ n$ とその面積を求めよ.

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292016)

3.18 (1) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\ dx$ を求めよ.

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292019)

3.19 (1) 不等式 $\displaystyle\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{\pi}{6}$ を示せ.

(2) n を自然数とする．広義積分

$$I_n=\int_1^{\infty}e^{1-t}\frac{1}{t^n}dt$$

は関係式

$$I_1=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!+(-1)^{n+1}(n+1)!\,I_{n+2}$$

を満たすことを示せ.

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292205)

3.20 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$　　(2) $\displaystyle\int x\log_e x dx \qquad (x>0)$

(富山大類 29)　　(固有番号 s292302)

3.21 関数 $f(x)=(1+kx)e^{kx} \quad (x\geqq 0)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，k は実数である.

(1) 次の積分 $I(X)$ を X を用いて表せ．ただし，$X>0$ とする.

$$I(X)=\int_0^X f(x)dx$$

(2) $k=-1$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{X\to\infty}I(X)$ を求めよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{X\to\infty}I(X)$ が有限のとき，関数 $f(x)$ の広義積分は存在する．関数 $f(x)$ の広義積分が存在するための条件を，k についての不等式で表せ.

(富山大類 29)　　(固有番号 s292305)

3.22 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\cos^2 x dx$　　(2) $\displaystyle\int x\cos x dx$

(豊橋技科大類 29)　　(固有番号 s292704)

3.23 xy 平面上の曲線 $y=\cos(x-\pi)+1 \ \ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ と直線 $y=0$ に囲まれた図形 D について，次の問いに答えよ.

(1) D の面積 S を求めよ.

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ.

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ.

(豊橋技科大類 29)　　(固有番号 s292705)

3.24 以下に示した不定積分を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$　　(3) $\displaystyle\int x e^{-x^2} dx$

(豊橋技科大類 30)　　(固有番号 s302702)

3.25 xy 平面上の二つの曲線 $y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y = -\sin 2x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ とで囲まれる領域 R がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\sin 2x$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(2) 領域 R を図示せよ．

(3) 領域 R の面積 S を求めよ．．

(4) 曲線 $y = \sin x$ と 曲線 $y = |\sin 2x|$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(5) 領域 R を x 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ．

(豊橋技科大類 30)　　(固有番号 s302704)

3.26 次の定積分を求めよ．ただし，$y = \tan^{-1} x$ とした場合，$x = \tan y$ であることを意味する．

$$\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$$

(名古屋大類 29)　　(固有番号 s292802)

3.27 (1) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ と置くとき，t を用いて $\cos x$ を表せ．また $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．

(2) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ と置換して定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi/3} \frac{1}{5 + 4\cos x} dx$ の値を求めよ.˙

(名古屋工業大類 30)　　(固有番号 s302902)

3.28 (1) 次の関数の不定積分を求めなさい．

$$\sin 3x \cos 2x$$

(2) 次の曲線と y 軸とで囲まれた部分を y 軸周りに回転してできる回転体の体積を求めなさい．

$$y = -3x^2 + 12 \qquad (0 \leqq x \leqq 2)$$

(三重大類 29)　　(固有番号 s293103)

3.29 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2e^x \cos x dx$ を計算しなさい．

(三重大類 29)　　(固有番号 s293107)

3.30 次の不定積分および定積分を求めよ．

(1) $y = \displaystyle\int x \log_e x \, dx$　　(2) $y = \displaystyle\int_1^3 \frac{2x^2 + 5x + 4}{x^2} dx$

(三重大類 29)　　(固有番号 s293110)

3.31 $x \geq 0$ 定義された関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ ついて，以下の問いに答えよ．

(1) f の増減おいび凹凸を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形を書け．

(2) f の最大値を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)| dx < \infty$ であることを示せ．

(4) $\displaystyle\int_0^\infty f(x) dx$ を求めよ．

(奈良女子大類 29)　　(固有番号 s293203)

3.32 次の定積分の値を求めよ．（ただし，e は自然対数の底）

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{3x^2-1}{x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$

(京都大類 29) (固有番号 s293305)

3.33 $a<b$ として，区間 $[a,\ b]=\{x \mid a \leq x \leq b\}$ で定義された連続実数値関数 $x \mapsto f(x)$ の最大値を M, 最小値を m とすると，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)\ , \quad a<c<b$$

となる c が存在することを示せ．

(京都大類 29) (固有番号 s293306)

3.34 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大類 29) (固有番号 s293403)

3.35 θ が $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，$x=2\cos\theta,\quad y=2\sin 2\theta$ で表される点 (x,y) は 1 つの曲線を描く．この曲線の方程式を $y=f(x)$ とする．$y=f(x)$ の 1 点 (a,b) における接線の方程式が $y=-2(x-c)$ となるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a,b,c の値をそれぞれ求めよ．

(2) 区間 $0 \leq x \leq a$ における曲線 $y=f(x)$ と区間 $a \leq x \leq c$ における直線 $y=-2(x-c)$ と x 軸で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(大阪大類 29) (固有番号 s293501)

3.36 (1) 自然数 n に対して，$f_n(x)=nxe^{-nx^2}\quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(2) $\lambda>0$ とする．自然数 n に対して，$g_n(x)=n^\lambda xe^{-nx^2}\quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx$$

が成り立つための λ の条件を求めよ．

(岡山大類 29) (固有番号 s294002)

3.37 実数 x に対し，

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)| \leq \dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ．

(3) $f''(x)+2f(x)\left(1-f(x)^2\right)=0$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ．

(広島大類 29)　　(固有番号 s294102)

3.38 s を正の実数とするとき，ガンマ関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ について，$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示せ．

(広島大類 30)　　(固有番号 s304108)

3.39 曲線 $y = 1 - x^2$ について，次の問題に答えなさい．

(1) x 軸とこの曲線とで囲む図形の面積を求めなさい．

(2) この曲線の第一象限における長さを求めなさい．

(山口大類 29)　　(固有番号 s294304)

3.40 (1) 任意の $x > 0$ に対して

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

が成り立つような定数 a, b, c を求めよ．

(2) $r > 0$ のとき，次の広義積分の値を r を用いて表せ．

$$\int_r^\infty \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

(3) (2) で求めた広義積分の値を $I(r)$ とおく．$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\big(r^2 I(r)\big)$ を求めよ．

(高知大類 29)　　(固有番号 s294502)

3.41 (1) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x\ dx$

(3) 曲線 $y = \sin^{-1} 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$，直線 $y = \dfrac{\pi}{2}$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに１回転してできる立体の体積 V を求めよ．

ただし，$\sin^{-1} x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする．

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294602)

3.42 a, b は実数で，$a > 0$ とする．関数 $f(x) = \dfrac{bx+1}{x^2+a}$ が $x = -1$ で極値 $\dfrac{1}{2}$ をとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値および極限 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形を描け．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294611)

3.43 (1) $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{3}{5}$ を満たす x の値を求めよ．　ただし，$\tan^{-1} x$ は逆正接関数とし $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数とする．

(2) $y = (x^2+1)e^{-3x}$ の n 次導関数をライプニッツの公式を用いて求めよ．

(3) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx$ と定める．このとき次の漸化式を示せ．

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294614)

3.44 (1) 「部分分数への分解」を用いて，任意の自然数 n に対して次の関数 $f(x)$ の n 次（n 階）導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．ただし，$x \neq 3,\ x \neq -1$ とする．

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

(2) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x^3 - 6x^2 - 16x - 5}{x^2 - 2x - 3}dx$

(九州大類 29)　　(固有番号 s294703)

3.45 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \sin^2 x\right)\cos x\ dx$

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294901)

3.46 半径 1 の円板が x 軸上をすべることなくころがったとき，円周上にある一点 P の軌跡に着目する．円板の回転角を θ とし，$\theta = 0$ のとき，点 P は原点に位置したとする．

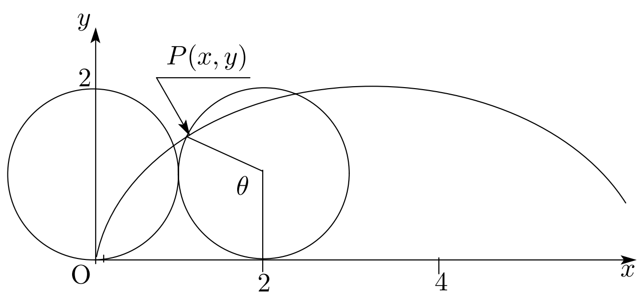
(1) 回転角が θ で与えられるとき，点 P の x 座標と y 座標を求めよ．

(2) さらに微小な角 $\Delta\theta$ 回転したときの，x 座標と y 座標の変化量を求めよ．

(3) また，このときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(4) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(5) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P の軌跡と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．



(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294908)

3.47 次の不定積分を求めなさい．

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$　　(2) $y = \dfrac{1}{x}\quad (x > 0)$　　(3) $y = e^x$　　(4) $y = x\sqrt{x^2 + 1}$

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294913)

3.48 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\log$ は自然対数である．

(1) この広義積分が収束することを示せ．

(2) $I = -\dfrac{\pi}{2}\log 2$ であることを示せ．

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294918)

3.49 関数 $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$，$g(x) = \dfrac{2}{x^2}$ に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の微分および不定積分を求めなさい．

(2) 合成関数 $h(x) = f(x)g(x)$ の不定積分を求めなさい．

(3) 合成関数 $k(x) = \dfrac{f(g(x))}{x}$ の極値，変曲点を示し，そのグラフの概形を描きなさい．

(熊本大類 29)　　(固有番号 s295202)

3.50 以下の不定積分，定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx$

(鹿児島大類 29) (固有番号 s295402)

3.51 次の不定積分を求めなさい． $\displaystyle\int x\sin x dx$

(鹿児島大類 29) (固有番号 s295407)

3.52 曲線 $x=y^2+1$ と直線 $x=-y+3$ とについて以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線と直線のグラフを描きなさい．

(2) 曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大類 29) (固有番号 s295411)

3.53 x 軸上を運動する質点 Q を考える．質点 Q の加速度 a は，任意の時刻 t において $a=\dfrac{t}{t^2+3t+2}$ と表されるものとする．この時，時刻 t における質点 Q の速度 v を表す式を求めよ．なお，$t \geqq 0$ であり，$t=0$ のときの速度 v は 0 とする．

(鹿児島大類 29) (固有番号 s295413)

3.54 以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int e^{-3x}\cos(4x)dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx$

(室蘭工業大類 29) (固有番号 s295508)

3.55 以下の設問に答えよ．ただし，T $(T>0)$ および ϕ は定数である．

(1) 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

(2) 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^{T}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)\right]^2 dt$

(3) 次式が成り立つことを示せ． $\displaystyle\int_0^{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)dt=0$

(4) 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^{T}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 dt$

(島根大類 29) (固有番号 s295801)

3.56 無限積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{-1}{x(1+x^2)}dx$ を求めなさい．

(首都大類 29) (固有番号 s295904)

3.57 次の不定積分を求めなさい． $\displaystyle f(x)=\int \cos^2 x\ dx$

(首都大類 29) (固有番号 s295905)

3.58 次の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1)$\displaystyle\int(7x^3+3x^2+2x+5)dx$ (2)$\displaystyle\int x^5\log x\ dx$ (3)$\displaystyle\int_3^5\frac{dx}{x^2+3x-10}$ (4)$\displaystyle\int_0^2\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

(東京海洋大類 29) (固有番号 s296402)

3.59　a が0でない実数のとき，次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

なお，解答に際して，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

を用いてよい．

(和歌山大類 29)　　(固有番号 s296501)

3.60　(1)　次式を満たす a, b, c の値を求めなさい．

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

(2)　次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$$

(和歌山大類 29)　　(固有番号 s296502)

3.61　次の定積分を求めなさい．ただし，e は自然対数の基底である．

$$\int_0^2 x^2 e^x dx$$

なお，解答に際して，$f'(x)$, $g'(x)$ を，それぞれ，$f(x)$, $g(x)$ の一階導関数とするとき，

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

を用いてよい．

(和歌山大類 29)　　(固有番号 s296503)

3.62　関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，条件 $f(0) = -3$，$f(1) = -\dfrac{9}{4}$，$f'(2) = 10$，$f'(3) = 20$ をすべて満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．

(1)　a, b, c, d の値を求めよ．

(2)　$y = f(x)$ の極値を求め，そのグラフをかけ．

(3)　$y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(富山県立大類 29)　　(固有番号 s297103)

微分積分 II

4　級数

4.1　$e^x \cos x$ と $\tan x$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ．

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290101)

4.2 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ の $x=0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ.

(北見工業大類 29)　　(固有番号 s290201)

4.3 (1) 0 以上の整数 n に対して,

$$\int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

を示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ が収束することを示し，その極限を求めよ.

(東北大類 29)　　(固有番号 s290508)

4.4 逆三角関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ (ただし，$-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$) について，以下の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(2) $\cos\left(\sin^{-1} x\right)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を x で微分せよ.

(4) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(5) $y = f(x)$ として $y''(1-x^2) = y'x$ がり立つことを示せ.

(6) $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290605)

4.5 次の問に答えなさい．ただし，$\log x$ の底は，自然対数の底 (e) とする.

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x\cos x$ を，それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x\cos x}\right)$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n}$ を求めなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\log x + \sqrt{\log x}} - \sqrt{\log x - \sqrt{\log x}}\right)$ を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} (1-\tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい.

(千葉大類 29)　　(固有番号 s291201)

4.6 (1) 関数 $f(x) = e^x$ をマクローリン展開（$x=0$ のまわりでテイラー展開）せよ.

(2) 以下の性質 (A) を用いて，次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!} + \frac{n-1}{2!} + \cdots + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

が成り立つ.

(3) 上の性質 (A) を証明せよ.

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291312)

4.7 (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$ が成り立つとする. このとき等式 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を証明せよ.

(3) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ は $n \longrightarrow \infty$ のとき点 $\alpha \in I$ に収束し, 関数 f は点 $\alpha \in I$ で連続であるとする. このとき等式 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ を証明せよ.

(4) 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$ は単射であるとする. このとき f も単射であることを示せ.

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291318)

4.8 (1) $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x \quad (x > -1)$ を示せ.

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすとき, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$ を求めよ.

(3) 実数列 $\{b_n\}$ は有界数列とする. もし $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{b_n}{n}\right)^n$ が収束するならば, $\{b_n\}$ も収束することを示せ.

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292203)

4.9 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ を $|x-1| < 1$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{4} a_n (x-1)^n + R(x), \qquad \lim_{x\to 1} \frac{R(x)}{(x-1)^4} = 0$$

と表すとき, 係数 a_n $(0 \leqq n \leqq 4)$ をすべて求めよ.

(名古屋工業大類 30)　　(固有番号 s302901)

4.10 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_1 = 1\,, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1} \quad (n \geq 2)$$

と定められている. 以下の問いに答えよ.

(1) a_2, a_3 を求めよ.

(2) $n \geq 2$ に対し　$a_n - \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2}-1}{a_{n-1}+1}(a_{n-1} - \sqrt{2})$ が成り立つことを示せ.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ を示せ.

(奈良女子大類 29)　　(固有番号 s293202)

4.11 (1) 関数 $g(x) = \sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} n} \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ. ただし, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする. また, 右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき, $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ.

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について，その収束半径を求めよ．

(岡山大類 29)　　(固有番号 s294001)

4.12 (1) n を自然数として，$\sin x$ の n 次導関数が $\sin(x+a_n)$ となるような実数 a_n を一つ求めよ．

(2) 数列 $\left\{b_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して，任意の実数 x と任意の自然数 n に対して

$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}$　が成り立つ．b_k を求めよ．

(3) $0.841 < \sin 1 < 0.842$ であることを示せ．

(4) $\sin 1$ は無理数であることを示せ．

(広島大類 29)　　(固有番号 s294104)

4.13 a を実数，r を正の実数とする．座標平面において，y 軸上の点 $(0,a)$ を中心とし半径が r である円を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 円 C の下半分を表す方程式を $y=f(x)$ の形で表せ．

(2) (1) で求めた $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．ただし，剰余項は不要である．

(3) 円 C が $x=0$ の近くで最も良く放物線 $y=x^2$ を近似するような a と r の値を求めよ．

(広島大類 30)　　(固有番号 s304102)

4.14 (1) 次の式の a, b に入れるべき数字を求めよ．　$\frac{6}{x^2+7x+10} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+5}$

(2) 次の数列の和を求めよ．　$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295420)

4.15 関数 $f(x) = x^{40} - x^{20}$ の $x=1$ における 2 次のテイラー近似を求めなさい．

さらに，その結果を使って，$f(1.002)$ の近似値を計算しなさい．

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295503)

4.16 $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ をマクローリン展開せよ．ただし，収束域は考慮しなくて良い．

(香川大類 29)　　(固有番号 s295701)

4.17 関数 $f(x) = e^x \cos x$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい．

(首都大類 29)　　(固有番号 s295903)

4.18 $f(x) = \arctan x$，つまり $f(x)$ を $\tan x$ の逆関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の第 3 次導関数 $f^{(3)}(x)$ を求めよ．

(2) 以下の等式を満たす 4 つの定数 a_0，a_1，a_2，a_3 をすべて求めよ．

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

ただし，記号 o はランダウのスモールオーである．

(3) $f\left(\sqrt{3}\right)$ の値を求めよ．

(4) $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(はこだて未来大類 29)　　(固有番号 s296302)

5 偏微分

5.1 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^3-6xy+3y^2+6$ の臨界点（停留点 ）を全て求め，それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ．

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290103)

5.2 関数 $z=(x+2y)^5$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大類 29)　　(固有番号 s290202)

5.3 $0 \leq t < 1$ とする．各 t について，次の関数の極大値をとる点と極小値をとる点を求めよ．極値を求める必要はないが，極大か極小であるかは明記すること．

$$f(x,y)=\left(x^2+y^2-1\right)(x-t) \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$$

(東北大類 29)　　(固有番号 s290507)

5.4 a を負でない実数とするとき，関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4axy$ の極値を求めよ．また，極値をとる時の $x,\ y$ の値を求めよ．

(東京工業大類 29)　　(固有番号 s290803)

5.5 2 変数関数 $f(x,y)=x^2y+xy^2+x^2-6xy-y^2-7x+5y$ について次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ が極値をとる点 (a,b) で，$a>0,\ b>0$ となるものを求め，$f(a,b)$ の値を求めなさい．さらに $f(a,b)$ が極大値であるか極小値であるか判定しなさい．

(東京農工大類 29)　　(固有番号 s290901)

5.6 関数 $f(x,y)=x^2+3xy-y^3+1$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) xyz 空間内の曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(2,-1,0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) xy 平面上の曲線 $f(x,y)=0$ が点 $(2,-1)$ の近くで定める陰関数を $y=\varphi(x)$ とする．$\varphi(x)$ を $x=2$ の近くで

$$\varphi(x)=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots$$

とテイラー展開したときの係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ をそれぞれ求めよ．

(電気通信大類 29)　　(固有番号 s291003)

5.7 以下の関数 $f(x,y)$ が原点 $(x,y)=(0,0)$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ．

(1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y} & (y\neq 0) \\ 0 & (y=0) \end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291308)

5.8　実 2 変数関数 $f(x,y)=x^3-3x-3y^2$ に対して，xyz 空間内の曲面 S を

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; z=f(x,y)\right\}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2)　k を正の定数とする．曲面 S 上の点 $(k,k,f(k,k))$ における接平面が原点 $(0,0,0)$ を通るように定数 k の値を定めよ．

(茨城大類 29)　　(固有番号 s291702)

5.9　2 変数関数 $f(x,y)=-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 y$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$D=\{(x,y)\mid 0<x<\pi,\ 0<y<\pi\}$ における $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2)　$E=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq\pi,\ 0\leqq y\leqq\pi\}$ における $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ．

(信州大類 30)　　(固有番号 s301901)

5.10　曲線 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2-1=0$ 上の点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における法線の方程式を求めよ．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292008)

5.11　2 変数関数 $f(x,y)=x^2+2xy+y^4-\dfrac{2}{3}y^3+1$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\left(1,\ 1,\ \dfrac{13}{3}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2)　関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3)　平面 $z=2x+2y+b$ が曲面 $z=f(x,y)$ のある点における接平面となるような b の値をすべて求めよ．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292021)

5.12　$f(x,y)$ を C^2 級の実数値関数とする．極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を行ったとき $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ が r だけの関数（$g(r)$ とする）になるならば，以下が成り立つことを示せ．

(1)　$f_x y=f_y x$　.

(2)　$f_{xx}+f_{yy}=g_{rr}+\dfrac{1}{r}g_r$　.

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292204)

5.13　$z=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とおく．偏導関数 $z_x,\ z_{xy}$ を求めよ．
（ なお記号 $\tan^{-1}$ は逆三角関数を表す．）

(岐阜大類 29)　　(固有番号 s292602)

5.14　次の関数の 2 階の偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を，それぞれ求めよ．

$$z=\sin\left(x^2y\right)$$

(名古屋大類 29)　　(固有番号 s292803)

5.15　関数 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3-y$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　曲面 $z=f(x,y)$ の点 $P\big(-1,1,f(-1,1)\big)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2)　$f(x,y)$ の極値を調べよ．

(名古屋工業大類 29)　　(固有番号 s292901)

5.16 関数 $f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x-y)$ について，３点

$$\text{(i)}\ \ (x,y)=(0,0)\ ,\qquad \text{(ii)}\ \ (x,y)=\left(\frac{2\pi}{3},\ -\frac{2\pi}{3}\right),\qquad \text{(iii)}\ \ (x,y)=(\pi,0)$$

は，$f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=0$ を満たす．このとき各点で $f(x,y)$ が極値を取るかどうかを判定せよ．また，極値を取る場合には極値を求めよ．

(名古屋工業大類 30)　　(固有番号 s302903)

5.17 関数 $F(x,y)=x^3+2y^3-7xy+4$ を考える．関数 $y=f(x)$ は，$x=2$ を含むある開区間 I 上で微分可能であり，次の条件 $(*)$ および $(**)$ を満たしているとする．

$(*)$ $F\,(x,f(x))=0\quad (x\in I)$

$(**)$ $f'(2)<0$

このとき，$f(2)$ の値および $f'(2)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大類 29)　　(固有番号 s293404)

5.18 関係式 $y=x\tan\theta$ の定める陰関数 $\theta=\theta(x,y)$ について　$\Delta\theta=\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$　を計算せよ．

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293803)

5.19 $f(x,y)=\sin(xy)$ とする．以下の各問いに答えよ．

(1) f の１階と２階の偏導関数を全て求めよ．

(2) f のマクローリン展開を２次の項まで求めよ．

(3) f の極値を調べよ．

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293809)

5.20 (1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $g(x,y)=x^3+y^3-9xy$ の臨界点を全て求め，それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が回転対称であるとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を満たすことを示せ．ただし，$f(x,y)$ が回転対称であるとは，任意の $x,y,\theta\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x,y)=f(x\cos\theta+y\sin\theta,\ -x\sin\theta+y\cos\theta)$$

を満たすことをいう．

(神戸大類 30)　　(固有番号 s303803)

5.21 $\mathbb{R}^2$ の領域 D_1, D_2 を

$$D_1=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0<x<1 \text{ かつ } x^2+y^2<1\right\}$$
$$D_2=\{(x,y)\ \mid 0<x<1 \text{ かつ } |y|<1\}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) D_1 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が x^2+y^2 のみに依存するとき，すなわち，

$$f(x,y)=h(x^2+y^2)$$

が任意の $(x,y)\in D_1$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき，D_1 上で

$$(*)\qquad y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 逆に，D_1 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が D_1 上で $(*)$ を満たすとき，f は x^2+y^2 のみに依存する関数であることを示せ.

(3) D_2 上の関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2-1)^2 & (x^2+y^2>1 \text{ かつ } y>0 \text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外のとき})\end{cases}$$

で定義する．g は $(*)$ の f を g で置き換えた方程式を D_2 上で満たすことを示せ.

(4) 小問 (1)，(2) の D_1 を D_2 に置き換えると，それぞれ正しいと言えるだろうか．理由を挙げて述べよ.

(高知大類 29)　　(固有番号 s294503)

5.22 $a\neq 0$ を定数として，$f(x,y)=\log(x^a+y^a)$ とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$,　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$,　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ がすべての $x>0$, $y>0$ に対して成り立つように，a の値を定めよ.

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294603)

5.23 曲線 $x^2-y^2=-1$ 上の点 $(1,\ \sqrt{2})$ における接線の方程式を求めよ.

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294608)

5.24 $z=f(t)$ を C^1 級の関数とする．$t=\sqrt{x^2+y^2}$ とするとき，　$yz_x-xz_y=0$　が成立することを示せ.

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294609)

5.25 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ を求めなさい.

(1) $z=3x^2-5xy+3y^2-2x+4y+10$　　(2) $z=e^{2x}\cos 2y$

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294912)

5.26 関数 $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{x-y}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である.

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294917)

5.27 関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0) \text{ のとき})\\ 0 & ((x,y)=(0,0) \text{ のとき})\end{cases}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) $(x,y)\neq(0,0)$　のとき，$f_x(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_x(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$ を示せ.

(3) $f_{xy}(0,0)=\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=0$ を求めよ.

(宮崎大類 29)　　(固有番号 s295304)

5.28 下に示す関数 $f(x,y)$ について以下の問に答えよ.

$$f(x,y)=x^2+y^2-6x-2y+xy+11$$

(1) $f(x, y)$ を x で偏微分せよ.

(2) $f(x, y)$ を y で偏微分せよ.

(3) $f(x, y)$ の極小値を求めよ.

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295510)

5.29 以下に示す関数の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を求めよ.

$$z = \frac{x^3 + y^2}{x - y}$$

(香川大類 29)　　(固有番号 s295702)

5.30 関数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 6y$ の極値を求めよ.

(島根大類 29)　　(固有番号 s295808)

6 重積分

6.1 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$　　(2) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$,　$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + 3y^2 \leqq 1\right\}$

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290104)

6.2 積分 $J = \displaystyle\iint_D (1 - x - y) dxdy$ を計算せよ. ただし, D : $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1$ とする.

(北見工業大類 29)　　(固有番号 s290205)

6.3 xyz 空間の曲面 $\boldsymbol{S} : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4z$ および平面 $\boldsymbol{P} : z = a(x + y + 2)$ について, 以下の問に答えよ. ただし, a は正の実数とする.

(1) 平面 $y = -1$ と曲面 $\boldsymbol{S}$ の交線の方程式を求め, 図示せよ.

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ の交線 $\boldsymbol{C}$ を考える. $a = 1$ のとき, $\boldsymbol{C}$ を xy 平面に投影した曲線の方程式を求めよ.

(3) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が一点で接するときの a の値と接点の座標を求めよ.

(4) $a = 1$ のとき, 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が囲む領域の体積を求めよ.

(東北大類 29)　　(固有番号 s290502)

6.4 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ で連続であることを示せ.

(2) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ かつ } y \geq 0\right\}$ とするとき, 積分 $\displaystyle\int_D f(x, y) dxdy$ の値を求めよ.

(東北大類 29)　　(固有番号 s290506)

6.5 c を正の実数とする．次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq cx$$

(東京工業大類 29)　　(固有番号 s290804)

6.6 xyz 空間の 2 つの曲面 $S_1: z=x^2+2x,\ S_2: z=-y^2+4y-1$ によって囲まれた部分の体積を求めなさい．

(東京農工大類 29)　　(固有番号 s290902)

6.7 (1) 積分順序を交換することにより，次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^\pi dx \int_x^\pi \frac{x\sin y}{y} dy$$

(2) 次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V x^2 dxdydz\ , \qquad V=\left\{(x,y,z)\ :\ y \leqq x,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x^2+y^2+x^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大類 29)　　(固有番号 s291004)

6.8 三次元空間の O-xyz 座標系で与えられた直円柱 $x^2+y^2 \leq ax$ と球 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$（ただし，$a>0$）について，以下の問に答えなさい．

(1) 直円柱と球の共通部分の体積を求めなさい．

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ が，直円柱によって切り取られる部分の面積を求めなさい．

(千葉大類 29)　　(固有番号 s291203)

6.9 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ (x+y)^2+4(x-y)^2 \leq 1\right\}$ における重積分

$I=\displaystyle\iint_D \frac{\left|x^2-y^2\right|}{(x+y)^2+4(x-y)^2} dxdy$ の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $x+y=r\cos\theta,\ x-y=\dfrac{r}{2}\sin\theta$ とするとき，$x,\ y$ の $r,\ \theta$ に関するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291301)

6.10 $f(x,y)=xy$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分 df を求めよ．

(2) x-y 平面において，c をパラメータとする曲線群 $f(x,y)=c$ と直交し，点 $(p,0)$ を通る曲線 C_p を求めよ．ただし，$p>0$ とする．

(3) C_p 上にあり $x>0$ を満たす点の集合を D_p と表す．領域 D を

$$D=\bigcup_{1\leq p\leq 2} D_p$$

によって定義するとき，積分

$$\iint_D \frac{1}{x^2} dxdy$$

の値を求めよ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291304)

6.11 $E=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 1-\frac{x}{2}\right\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれの正整数 m に対して，

$$R_m(f)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i}f\left(\frac{2i}{m},\ \frac{j}{m}\right)\frac{2}{m^2}$$

で与えられている．$f(x,y)=x+y$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ．　ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}k^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x,y)$ の E 上での二重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291309)

6.12 次の 2 重積分を求めよ．ただし，放物線 $y=x^2$ と直線 $y-x-2=0$ で囲まれた領域を D とする．

$$\iint_D xydxdy$$

(埼玉大類 29)　　(固有番号 s291403)

6.13 n を正の整数，a を正の実数とする．xy 平面内の領域 $D_a=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2\leq a^2\right\}$ 上の 2 重積分

$$I_a(n)=\iint_{D_a}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}dxdy$$

について，以下の各問いに答えよ．

(1) $I_a(1)$ を求めよ．

(2) $n\geq 2$ のとき，$I_a(n)$ を求めよ．

(3) $n\geq 2$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}I_a(n)$ を求めよ．

(茨城大類 29)　　(固有番号 s291703)

6.14 $D=\left\{(x,y)\ ;\ x\geq 0,\ x\geq y,\ 1\leq x^2+y^2\leq 2\right\}$ のとき次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$$

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292004)

6.15 xyz 空間における曲線 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ について下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 $z=x^2+y^2$ 上の点 (a,b,a^2+b^2) における接平面の方程式を求めなさい．ただし，曲面 $x=f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は，f_x，f_y を f の偏導関数とすると，

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる，

(2) 前問の接平面が点 $(0,0,-1)$ を通るように動くとき，接点の軌跡を含む平面 S の方程式を求めなさい．

(3) 曲線 $z=x^2+y^2$ と平面 S とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい．

(長岡技科大類 29)　　(固有番号 s292104)

6.16 関数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ.

(2) 領域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\, 0\leqq y\leqq\sqrt{3}x,\ x^2+y^2\geqq 1,\ x\leqq 1\right\}$ を図示せよ.

(3) (2) の領域 D 上の重積分

$$\iint_D \{f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)\}\,dxdy$$

を求めよ.

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292208)

6.17 次の重積分 I の値を求めよ.

$$I=\iint_D \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ :\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 5\right\}$$

(岐阜大類 29)　　(固有番号 s292603)

6.18 次の定積分と 2 重積分を求めよ.

(1) $I_1=\displaystyle\int_0^2\sqrt{|x^2-1|}dx$

(2) $I_2=\displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{1+\sin^2 x}dxdy,\quad D\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq x\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}\right\}$

(名古屋工業大類 29)　　(固有番号 s292902)

6.19 重積分 $I=\displaystyle\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1,\ y\geqq 0\right\}$ の値を求めよ.

(名古屋工業大類 30)　　(固有番号 s302904)

6.20 2 重積分 $\displaystyle\int_0^2\int_0^x\sqrt{x^2-t^2}dtdx$ の値を求めよ.

(三重大類 29)　　(固有番号 s293116)

6.21 次の 2 重積分

$$I=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy$$

を求めよ．ここで a は正の実定数とする.

(奈良女子大類 29)　　(固有番号 s293205)

6.22 $a,b,c>0,\ V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$ とするとき，積分　$I=\displaystyle\iiint_V(x^2+y^2)dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293802)

6.23 xz 平面において，曲線 $z=\sqrt{8-x^2}$　(ただし $0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$)，直線 $z=x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ.

(1) D の概形を描け.

(2) D の面積を求めよ.

(3) V の体積を求めよ.

(4) $\displaystyle\iiint_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293810)

6.24 積分 $\displaystyle\iint_{x^2-xy+y^2\leqq 1}(x-y)^2dxdy$ の値を求めよ.

(神戸大類 30)　　(固有番号 s303804)

6.25 $0<r<1$ とする．座標空間において，原点を中心とし半径が 1 である球体 B から，領域 $\left\{(x,y,z)\in B\ \middle|\ x^2+y^2<r^2\right\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) $B(r)$ の体積を求めよ.

(2) $B(r)$ の体積が B の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるとする．このとき，r の値と $B(r)$ の表面積を求めよ.

(3) $B(r)$ の表面積の最大値と，最大値を与える r の値を求めよ.

(広島大類 30)　　(固有番号 s304104)

6.26 積分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ を考える．重積分 I^2 を，二次元極座標を用いて計算することにより，I を求めよ.

(広島大類 30)　　(固有番号 s304107)

6.27 $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 2,\ x\leqq 2y\leqq 2\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \log(1+y^2)dxdy$$

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294604)

6.28 円柱面 $x^2+y^2=4$ の内部にある円柱面 $x^2+z^2=4$ の表面積 S を求めよ,

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294610)

6.29 a は $a>0$ なる定数とする．xy-平面内の領域 D と，D 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を，次のように定義する.

$$D=\{(x,y)\mid 0<y<x<a\}$$
$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}$$

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ.

(2) $0<x<a$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ.

$$\int_0^x f(x,y)dy$$

(3) 領域 D における $f(x,y)$ の 2 重積分（広義積分）を求めよ.

(九州大類 29)　　(固有番号 s294705)

6.30 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{2+x^2+y^2}dxdy \qquad \text{（ただし，}D\text{ は }1\leqq x^2+y^2\leqq 4\text{ で表される領域とする．）}$$

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294902)

6.31 重積分

$$I=\iint_D xdxdy\ , \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{4}x^2\leqq y\leqq\frac{1}{2}x\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大類 29)　　(固有番号 s295305)

6.32 積分せよ.

$$\iint_D 2ydxdy \quad , \quad D\ :\ 1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 2x^2$$

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295512)

6.33 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D xydxdy \qquad D\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq a^2$$

(香川大類 29)　　(固有番号 s295703)

6.34 (1) $D=\{(x,y)\ :\ 0<x,\ 0<y,\ x+y<1\}$ とする．変数変換 $x=u-uv,\ y=uv$ により，D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ.

(2) D は問 (1) と同じとする．重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ を計算せよ.

(島根大類 29)　　(固有番号 s295807)

7 微分方程式

7.1 以下の微分方程式を解きなさい.

(1) $y'=xy-x-y+1$　　(2) $y''-6y'+5y=13\cos x$

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290107)

7.2 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{2x+y-1}$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $u=2x+y-1$ とおき，与えられた微分方程式を変数分離形になおしなさい.

(2) この微分方程式の一般解を求めなさい.

(3) 初期条件「$x=1$ のとき $y=-1$」を満たす特殊解を求めなさい.

(岩手大類 29)　　(固有番号 s290304)

7.3 以下の微分方程式を ( ) 内の条件のもとで解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-xy$　　$(x=0,\ y=2)$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=2x$　　$(x=0,\ y=5\quad$ および $\quad x=1,\ y=6)$

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290608)

7.4 (1) 関数 $y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+2xy-x^2}{2x^2}$$

(2) 関数 $q(t)$ に関する次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．ただし，$R,\ C,\ E$ は 0 ではない正の実定数である．また，$q(t) \leqq CE$ が成り立つ.

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E$$

(a) 一般解を求めよ.

(b) 初期条件 $t=0,\ q(t)=0$ を満たす解を求めよ.

(c) 前問 (b) で求めた解の $t \geqq 0$ におけるグラフの概形を描け.

(3) 関数 $x(t)$ に関する次の 2 階の微分方程式について,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

下記のように変数変換を行なって 1 階の連立微分方程式に書き換えるとき,係数行列 A を求めよ.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt}$$

ただし,$m,\ c,\ k$ は実数定数であって,m は 0 ではない.

(東京大類 29)　　(固有番号 s290701)

7.5 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式

$$\frac{dy^2}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=e^x$$

を境界条件 $y(0)=2,\ y'(0)=0$ のもとで解け.ただし,$y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする.

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=(1-y)y$$

を解け.ただし,$y(0)=\dfrac{1}{2}$ とする.

(3) $x>0$ の範囲で定義された関数 $u(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{A}{x}\,\frac{du}{dx}-u=0\cdots(*)$$

に関して,以下の問いに答えよ.ただし,A は定数で $A \leq 1$ とする.

(a) 以下の微分方程式

$$\frac{d^2f_\alpha}{dx^2}+\frac{1}{x}\,\frac{d\,f_\alpha}{dx}-\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)f_\alpha=0$$

を満たす関数 $f_\alpha(x)\neq 0$ があるとする.ただし,α は非負の定数とする.ここで,式 $(*)$ の解が,関数 $g(x)$ を用いて $u(x)=f_\alpha(x)g(x)$ と表せると仮定すると,

$$\Big[\quad (\text{ア}) \quad\Big]\frac{d\,f_\alpha}{dx}+\Big[\quad (\text{イ}) \quad\Big]f_\alpha=0$$

が成り立つ.空欄 (ア), (イ) に入る数式を,$g(x),\ A,\ \alpha$ を用いて表せ.

(b) (a) の空欄 (ア), (イ) に入る数式が常にゼロとなるよう,$g(x)$ および定数 α を A を用いて表せ.また,必要であれば,積分定数の記号としては C を用いよ.

(東京大類 30)　　(固有番号 s300701)

7.6 微分方程式 $y''+2y'+5y=10\cos x$ の解 $y=y(x)$ が,$y(0)=0,\ y'(0)=1$ を満たすとき,y を求めなさい.ただし $y'=\dfrac{dy}{dx},\ y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.

(東京農工大類 29)　　(固有番号 s290904)

7.7 (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + Kx = 1$ が区間 $[0, L]$ で与えられている．一般解を求め，$y(0) = y(L) = 0$ を境界条件とする解を求めよ．

(2) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = xe^x$ を解け．

(3) $(1 + \exp(x))\dfrac{dy}{dx} = y$ が与えられている． $y(0) = 1$ を境界条件とする解を求めよ．

(横浜国立大類 29)　　(固有番号 s291101)

7.8 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = (y - x)^2$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = (y + \cos x)\sin x$

(横浜国立大類 29)　　(固有番号 s291104)

7.9 次の微分方程式を解きなさい．

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = -2$, 初期条件 $t = 0$ のとき $y = 2,\ \dfrac{dy}{dt} = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = \cos t - 2t$ の一般解を求めなさい．

(千葉大類 29)　　(固有番号 s291204)

7.10 以下の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2y-x}$　　(2) $2xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4x^2$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 4e^x$　　(4) $\sin x\dfrac{dy}{dx} - 2y\cos x = 2x\sin^3 x$

(埼玉大類 29)　　(固有番号 s291406)

7.11 3 次元空間の曲線 $x = 0$，かつ $z = y^2$ $(0 \leqq y \leqq 2)$ を z 軸のまわりに回転させてできる曲面を考える．この曲面を内面とする容器を z 軸の正方向が鉛直上向きになるように置き，単位時間当たり体積 V_0（定数）の水を容器が完全に満たされるまで注ぎ入れる．このとき，次の設問に答えよ．

(1) 容器の底から水面までの高さが h のとき，容器内の水の体積 V を求めよ．

(2) 空の容器に水を注ぎ入れ始めてから時間 t 後の容器の底から水面までの高さを t の関数 $h(t)$ と表す．$h(t)$ に対する微分方程式を導け．また，それを解いて $h(t)$ を求めよ．

(3) 容器を完全に満たしてから静かに 45 度傾けたとき，容器内に残る水の体積を求めよ．

(山梨大類 29)　　(固有番号 s291801)

7.12 定数係数の 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{5t} \tag{1}$$

の一般解を求める．

(a) 斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

の基本解を求めよ．

(b) 式 (1) の特解を $y(t) = Ce^{\alpha t}$ とおいて，定数 C と α を求めよ．

(c) 式 (1) の一般解を求めよ．

次に，変数係数の 2 階微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = x^5 \tag{2}$$

の一般解を求める．

(d) $x = e^t$ とおくことで，式 (2) が式 (1) に書き換えられることを示せ．

(e) 式 (2) の一般解を求めよ．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292018)

7.13 x の関数 y についての微分方程式

$$(*) \qquad y'' - y = e^x \sin x$$

を考える．下の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 $y'' - y = 0$ の一般解を求めなさい．

(2) a, b を定数として，$y = ae^x \cos x + be^x \sin x$ が微分方程式 $(*)$ を満たすような a, b の値を求めなさい．

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい．

(長岡技科大類 29)　　(固有番号 s292102)

7.14 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = 1$

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292209)

7.15 次の各問いに答えよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) 次の微分方程式が，一般解 $y = A\sin(nx + \alpha)$ をもつとき，$p(x)$ と $q(x)$ を求めよ．ただし，A, α は任意定数，$n \neq 0$ とする．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

(2) xy 平面上の点 (a, b) を中心とする直径 $R(> 0)$ の円が満たす微分方程式を求めよ．ただし，微分方程式に a, b および R を含んではならない．

(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$x^{-1}\frac{dy}{dx} + 2y = 2$$

(富山大類 29)　　(固有番号 s292306)

7.16 次の微分方程式を解け．ただし，k, p, q はゼロではない定数で，かつ $p \neq q$ であり，さらに，$t = 0$ において $x = 0$ とする．

$$\frac{dx}{dt} = k(p - x)(q - x)$$

(名古屋大類 29)　　(固有番号 s292804)

7.17 $y = y(x)$ に関する微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = x$ の一般解を求めなさい．

(三重大類 29)　　(固有番号 s293106)

7.18 微分方程式 $0 = dy + aydx$ で表される関数 $y = f(x)$ について以下の (1)〜(3) の問いに解答せよ．ただし，a は実数で $a > 0$ とする．

(1) $f(0) = a$ の時，与えられた微分方程式を解き，$f(x)$ を x のみの関数として表せ．

(2) $g(x) = xf(x)$ とする時，極値や変曲点を示して $y = g(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) 以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{a \to \infty} \frac{\displaystyle\int_0^\infty g(x)dx}{\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx}$$

(三重大類 29)　　(固有番号 s293113)

7.19　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \cos 2x$ の一般解を求めよ．

(三重大類 29)　　(固有番号 s293117)

7.20　以下の微分方程式を考える．

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_1x_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

ただし，m, k_1, k_2 は正の実定数である．以下の問いに答えよ．

(1)　これら 2 つの方程式を $X_1 = x_1 + x_2$, $X_2 = x_1 - x_2$ で定義される X_1, X_2 に対する方程式に書き直せ．また，$\omega = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$，　$\omega' = \sqrt{\dfrac{k_1 + 2k_2}{m}}$ とおいて，X_1, X_2 に対する一般解を求めよ．

(2)　$t = 0$ で，$x_1 = 1$, $x_2 = 0$ かつ $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ を満たす解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を求めよ．ここで，$v_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$，　$v_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$ とする．

(奈良女子大類 29)　　(固有番号 s293206)

7.21　微分方程式 $2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ の一般解が，$y^2 = Cx$ （C は任意定数）であることを示せ．次に，条件（$x = 1$ のとき $y = 3$）を満たす微分方程式の解を求めよ．

(京都大類 29)　　(固有番号 s293301)

7.22　次の微分方程式について，(　) 内の条件を満たす解を求めよ．

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y$　　（$x = 0$ のとき $y = 3$）

(2)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7x - 3y + 2}{3x - 4y + 5}$　　（$x = 0$ のとき $y = 1$）

(3)　$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$　　（$x = 0$ のとき $y = 3$）

(京都大類 29)　　(固有番号 s293302)

7.23　(1)　2 回微分可能な関数 $F(x)$ に対し，不定積分に関する関係式

$$\int (F''(x) + F(x)) \sin x dx = F'(x) \sin x - F(x) \cos x + C$$

を示せ．ただし，C は任意定数とする．

(2)　n を 3 以上の自然数とする．微分方程式

$$y' + y = e^{-x}\left\{x^n + n(n-1)x^{n-2}\right\} \sin x$$

の解 $y = y(x)$ で条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ．

(京都工芸繊維大類 29)　　(固有番号 s293405)

7.24　次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} - \frac{1}{2x^2} \qquad (x \neq 0) \qquad (*)$$

(1)　$u(x) = xy$ とおくとき，関数 $u(x)$ が満たすべき微分方程式を示せ．

(2)　微分方程式 $(*)$ の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．

(3)　微分方程式 $(*)$ の解 $y = y(x)$ を，初期条件「$x = 1$ のときに $y = 2$」のもとで求めよ．

(大阪大類 29)　　(固有番号 s293502)

7.25 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

(大阪府立大類 29)　　(固有番号 s293602)

7.26 次の問に答えよ．ただし，$'$ は x による微分を表す.

(1) 任意の微分可能な関数 $y(x)$ に対して

$$u(x)^{-1}\{u(x)y(x)\}' = y'(x) + x^2y(x)$$

となるような関数 $u(x)$ を求めよ.

(2) $y(x)$ に対する微分方程式

$$y'(x) + x^2y(x) = x^5$$

の一般解を求めよ.

(3) $p(x), q(x)$ を与えられた関数として，$y(x)$ の微分方程式

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

の一般解の公式を導け.

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293805)

7.27 $(-1,1)$ で定義された C^∞-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

自然数 n に対し，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく.

(1) a_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1 - x \leqq e^{-x} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい.

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ.

(神戸大類 30)　　(固有番号 s303805)

7.28 次の初期値問題について答えなさい.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$\dfrac{dy}{dx} = -y\tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) さらに，次の式を満足する上記 (1) で求めた一般解の特殊解を求めなさい.

$y(0) = \dfrac{1}{2}$

(山口大類 29)　　(固有番号 s294301)

7.29 次の微分方程式を解け.

(1) $x^2y' = (2x+y)(x+y)$　　(2) $y''\sin x + y'\cos x = 0$　　(3) $y'' + y = \sin x$

(九州大類 29)　　(固有番号 s294706)

7.30 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\sin 2x$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-6y=e^{-3x}$

(佐賀大類 29)　(固有番号 s294903)

7.31 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=x\left(1+y^2\right)$

(佐賀大類 29)　(固有番号 s294910)

7.32 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6x=0$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+3}{x-y}$

(佐賀大類 29)　(固有番号 s294914)

7.33 ある反応の反応速度が反応物の濃度 C の二乗に比例し，比例定数は k であった．以下の問いに答えなさい.

(1) 時間を t として，C の時間変化を表す微分方程式を答えなさい.

(2) C の一般解を答えなさい.

(3) 初期条件 $t=0$ のとき $C=C_0$ として，C の特殊解を答えなさい.

(4) $C=(1/2)C_0$ となる時間 $t_{1/2}$ を答えなさい.

(佐賀大類 29)　(固有番号 s294915)

7.34 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ の一般解 $y=y(x)$ を求めよ.

(宮崎大類 29)　(固有番号 s295303)

7.35 以下の微分方程式の解を求めよ．ただし，虚数単位は i とする.

(1) $y\dfrac{dy}{dx}+x=0$　（ただし，$x=1$ のとき $y=1$ ）

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+10y=0$　（ただし，$x=0$ のとき $y=1$, $\dfrac{dy}{dx}=4$ ）

(3) $(\cos x+y)dx+xdy=0$　（ただし，$x=\pi$ のとき $y=1$ ）

(鹿児島大類 29)　(固有番号 s295403)

7.36 次の微分方程式 (1), (2) の一般解を求めよ．解答は実数値関数を用いて表すこと.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-6y=0$

(鹿児島大類 29)　(固有番号 s295414)

7.37 次の常微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-35y=0$$

(鹿児島大類 29)　(固有番号 s295418)

7.38 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $(x^2-4)\dfrac{dy}{dx}=y$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+4y=8\sin(2x)$

(室蘭工業大類 29)　(固有番号 s295505)

7.39 次の微分方程式の解を求めよ.

$$2x - 2xy + y' = 0$$

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295511)

7.40 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

(首都大類 29)　　(固有番号 s295902)

7.41 以下の (1), (2) に示す微分方程式の一般解をそれぞれ求めなさい. ただし, e は自然対数の基底である.

(1) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

(2) $y'' - 4y' + 4y = e^x$

(和歌山大類 29)　　(固有番号 s296507)

線形代数

8　ベクトル

8.1 ベクトル $\overrightarrow{N} = (1, 2, -1)$ に直交し, 点 $(0, 1, 2)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(北見工業大類 29)　　(固有番号 s290207)

8.2 3 次元空間上に存在する 3 点 $A(0, 1, -1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(1, 1, 0)$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.

(2) (1) の平面の単位法線ベクトルを求めなさい.

(3) 原点を通り, (2) の単位法線ベクトルに平行な直線の方程式を求めなさい.

(4) (1) の平面と (3) の直線との交点の座標を求めなさい.

(岩手大類 29)　　(固有番号 s290301)

8.3 平面上に 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ があるとする. ただし, これらのベクトルの大きさ（長さ）はいずれも 0 ではなく, 互いに平行ではないとする. また, t を実数とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ の大きさ $|\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}|$ が最小になるときの t の値を, 内積を用いて表しなさい.

(2) (1) で求めた t の値が 0 であるとき, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の図形的関係を答えなさい.

(秋田大類 29)　　(固有番号 s290401)

8.4 以下のベクトルの各組は一次独立か, もしくは一次従属か答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(埼玉大類 29)　　(固有番号 s291404)

8.5　平面 $2x + 4y - z = 3$ について，点 $(2, 5, 0)$ と対称な点の座標を求めよ．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292011)

8.6　m を定数として 3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

を考える．$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は線形独立（一次独立）であることを示せ．また，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形従属（一次従属）になるような定数 m の値を求め，そのとき，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の線形結合（一次結合）で表せ．

(岐阜大類 29)　　(固有番号 s292606)

8.7　(1)　$2x + y + 2z = 3$ で表される平面 A と，$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ で表される球面 S がある．球面 S を平面 A で切ったとする．このとき，この平面 A で切った球面 S の切り口部分の面積を求めなさい．

(2)　$x + y + z = 1$ で表される平面 A と，$2x + y + z = 1$ で表される平面 B の交線の方程式を求めなさい．

(3)　ある平面に点 A, B, C があり，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ が (a, b)，ベクトル $\overrightarrow{AC}$ が (c, d) と表されるとき，三角形 ABC の面積を求めなさい．

(三重大類 29)　　(固有番号 s293102)

8.8　ベクトル $\overrightarrow{a} = (4, -3)$，$\overrightarrow{b} = (1, -7)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 $\theta(0\ ^\circ \leqq \theta \leqq 180\ ^\circ)$ を求めよ．

(2)　点 $P_0(3, 4)$ を通り，$\overrightarrow{a}$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(三重大類 29)　　(固有番号 s293111)

8.9　3 次元の実数ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2r - 3 \\ -r + 6 \\ r - 1 \end{pmatrix}$$

により定める．ただし，r は実数とする．

(1)　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立（線形独立）であることを示せ．

(2)　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 3 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底でないとき，$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の一次結合（線形結合）で表せるか．表せるなら，$\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表せ．そうでないなら，理由を述べ，$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表せないことを説明せよ．

(大阪府立大類 29)　　(固有番号 s293601)

8.10　3 次元空間における点 P，Q，R を考える．原点を O とするとき，$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\boldsymbol{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が，$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ を満たしているとする．ここで，$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルである．このとき，P，Q，R は同一直線上にあることを示せ．

(広島大類 30)　　(固有番号 s304110)

8.11 3次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，3つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

で生成される部分空間

$$V = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \mid c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}\}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ が1次従属であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ が V の基底となることを示せ．

(3) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$ を満たす実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を1組求めよ．

(4) $\begin{bmatrix} a \\ a+1 \\ a+2 \end{bmatrix} \in V$ となるような実数 a を求めよ．

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294606)

8.12 $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とする．次の $\boldsymbol{R}^4$ のベクトルについて，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が一次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d}$ が一次従属となるように k の値を定めよ．

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294919)

8.13 ベクトル

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$ と表現する．このとき，$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2)$，$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3)$，$(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ の長さをそれぞれ求めよ．

(3) $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ と向きが同じで，長さ1のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\ \boldsymbol{w}_3$ とする．このとき，

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2 + c\boldsymbol{w}_3$$

を満たす実数 $a,\ b,\ c$ をそれぞれ求めよ．

(宮崎大類 29)　　(固有番号 s295302)

8.14 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,0,1)$，点 $B(0,2,0)$ および点 $C(-1,-2,3)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) この 3 点を通る平面の方程式を求めよ．

(2) 求めた平面に直交な法線の単位方向ベクトルを求めよ．

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295404)

8.15 O を原点とする直交座標系の 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ とする．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が直交するような x_1 と y_1 の関係を求めなさい．

(2) (1) で求めた関係において，x_1 が整数であり，かつ，y_1 が 1 桁の自然数のなる解 x_1，y_1 を求めなさい．

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295408)

8.16 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対し，$|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=3$, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=5$ のとき，次の内積と絶対値を求めなさい．

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$　　　　(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295417)

8.17 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい．

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295501)

8.18 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$ が互いに直交するとき，これらのベクトルは 1 次独立であることを示しなさい．ただし，$\boldsymbol{a}_1\neq 0$, $\boldsymbol{a}_2\neq 0$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r\neq 0$ とします．

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295502)

8.19 以下に示すベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形従属になる m を求めよ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}5\\2\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}m\\7\\10\end{bmatrix}$$

(香川大類 29)　　(固有番号 s295704)

9　行列

9.1 次の三つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ に関して以下の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}0\\2\\a\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-2\\a\\1\end{pmatrix}$$

(1) これらのベクトルが一次独立となるとき，a が満たすべき条件を求めなさい．ただし，a は実数とする．

(2) $a=-1$ のとき，次の等式を満たす行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．

$$\boldsymbol{Ap}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Aq}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Ar}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290108)

9.2　行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(北見工業大類 29)　　(固有番号 s290206)

9.3　(1)　行列 $A=\begin{pmatrix}t+4&-3\\1&t\end{pmatrix}$ （ただし，t は実数）が正則であるための条件を示しなさい．

(2)　行列 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-3&-4\\2&2&4\end{pmatrix}$ の逆行列 B^{-1} を求めなさい．

(千葉大類 29)　　(固有番号 s291205)

9.4　行列 $A=\begin{pmatrix}8&1\\5&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&-1\\-5&8\end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ．

(1)　A の逆行列 A^{-1}　　(2)　$2(A-3B)$　　(3)　AB　　(4)　$(AB)^n$

(三重大類 29)　　(固有番号 s293112)

9.5　ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交することを示せ．

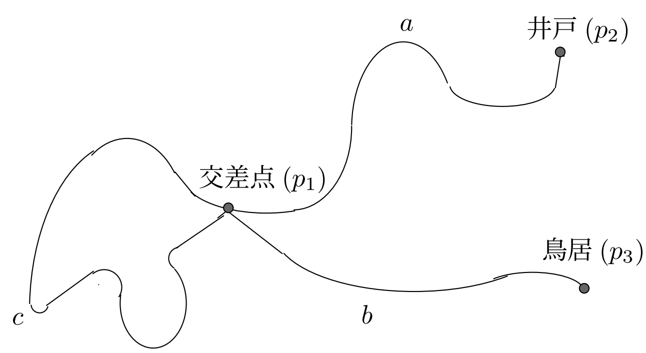
(2)　３つのベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ は一次独立でないことを示せ，

(3)　３次正方行列 A に対して $A\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$，$A\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ のとき，$A\boldsymbol{v}_3$ を求めよ．さらに

$A\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ であるとき，A を求めよ．

(奈良女子大類 29)　　(固有番号 s293201)

9.6



上の図はある村の略図を表す．この村には三つの主要な場所として交差点 (p_1)，井戸 (p_2)，鳥居 (p_3) がある．p_1 と p_2 は道 a で結ばれており，p_1 と p_3 は道 b で結ばれている．また，p_1 からは道 c を通って p_1 に戻ることができる．道 a,b,c の長さはいずれも 1 とする．

二つの場所 x と y があるとき（ただし，このとき一般に $x=y$ の場合も許す），x から一つ以上の道を通って y に至る経路を考えることにする．場所 x から場所 y に至る経路は，場所を表す記号と道を表す記号が交互に現れる記号列で表すことができる．また，ある経路中に現れる道の長さの合計をその経路の長さと呼ぶ．たとえば，p_2 から道 a を通り p_1 に移動し，さらに道 b を通って p_3 に至る経路は．記号列 $(p_2,\ a,\ p_1,\ b,\ p_3)$ で表すことができ，この経路の長さは 2 である．また，記号列 $(p_2,\ a,\ p_1,\ c,\ p_1,\ a,\ p_2)$ は長さ 3 の経路を表す．後者の例のように，経路中に同じ場所や同じ道が複数回現れても良い．

二つの場所 p_i と p_j が道で直接結ばれている場合は第 i 行第 j 列成分を 1 として，直接結ばれていない場合は第 i 行第 j 列成分を 0 とすることにより，この村の場所と道は，次のような 3 行 3 列の行列 A で表現できる．この行列を隣接行列と呼ぶ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 $A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の第 i 行第 j 列成分は，p_i から p_j に到達する長さ 2 の異なる経路の数を表す．たとえば，第 1 行第 1 列成分の値 3 は，p_1 から p_2 に到達する $(p_1,\ c,\ p_1,\ c,\ p_1)$, $(p_1,\ a,\ p_2,\ a,\ p_1)$, $(p_1,\ b,\ p_3,\ b,\ p_1)$ という 3 個の長さ 2 の経路が存在することを表す．

問 1〜問 3 に答えよ．

(1) A^3 を求めよ．

(2) A^3 の第 1 行第 1 列成分の値に対応する経路をすべて列挙せよ．

(3) A^n を求めよ．（ n は 1 以上の自然数である．）

(京都大類 29)　　(固有番号 s293304)

9.7 (i,j) 成分 a_{ij} が“ $i<j$ のとき $a_{ij}=0$ ”を満たすとき，その行列を下三角行列といい，さらに逆行列を持つとき可逆な下三角行列という．2 つの行列 X,Y について $Y=GX$ となる可逆な下三角行列 G が存在するとき $X\sim Y$ と表す．次の問に答えよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる x を求めよ．

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる $x_1,\ x_2,\ x_3$ を求めよ．

(3) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる $x_1,\ x_2,\ x_3$ を a_{ij} たちの有理式として表せ．

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293804)

9.8 次の行列 $A,\ B,\ C$ について以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $A+B$ を求めよ．

(2) A^TB を求めよ．

(3) C の逆行列を求めよ.

(佐賀大類 29)　(固有番号 s294904)

9.9 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, $A+B$, AB, A^2, B^TA^T をそれぞれ求めよ.

(2) 行列を用いて, 次の連立一次方程式を解け（計算過程を示すこと）.

$$\begin{cases} -x+y+z=2 \\ \ \ x+y+z=6 \\ \ \ x+y-z=4 \end{cases}$$

(3) 行列 A, B が正則な行列であるとする. このとき, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ.

(鹿児島大類 29)　(固有番号 s295415)

9.10 次の 2 次行列 $\boldsymbol{U}$ が直交行列になるように, 正規直交基底 a, b を求めなさい.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & a \\ \dfrac{1}{2} & b \end{bmatrix}$$

(鹿児島大類 29)　(固有番号 s295419)

9.11 次式を満たす x, y, z の値を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & z \\ x & 3 \\ 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

(和歌山大類 29)　(固有番号 s296504)

9.12 以下の (1), (2) に示す行列の逆行列をそれぞれ求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(和歌山大類 29)　(固有番号 s296505)

10　行列式

10.1 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) A の行列式を求めなさい.

(2) A の各成分の余因子を求めなさい.

(3) A は正則であるかどうかを述べなさい, また, 正則ならば, A の逆行列を求めなさい.

(岩手大類 29)　(固有番号 s290302)

10.2 $m \times n$ 型実行列 $A(t) = (a_{ij}(t))$ の各成分 $a_{ij}(t)$ が t に関して微分可能な関数であるとき, $a_{ij}(t)$ の導関数 $a_{ij}'(t)$ を成分にもつ $m \times n$ 型行列を $A'(t)$ で表す.

(1) 各成分が t に関して微分可能な関数である $m\times n$ 型， $n\times l$ 型実行列をそれぞれ $F(t)=(f_{ij}(t))$, $G(t)=(g_{jk}(t))$ で表す．このとき，行列の積 $F(t)G(t)$ の各成分も t に関して微分可能な関数となり，$(FG)'(t)=F'(t)G(t)+F(t)G'(t)$ が成り立つことを示せ.

(2) $F(t)=(f_{ij}(t))$ は，各成分が t に関して微分可能な関数である n 次実正方行列とする． $F(t)$ の行列式 $|F(t)|$ は t に関して微分可能な関数となることを示せ．すべての t について $F(t)=(f_{ij}(t))$ は正則であるとき， $F(t)$ の逆行列 $F^{-1}(t)$ の各成分も微分可能な関数で，$\left(F^{-1}\right)'(t)=-F^{-1}(t)F'(t)F^{-1}(t)$ が成り立つことを示せ.

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290603)

10.3 n を 2 以上の自然数として，n 次の正方行列 X_n を考える．X_n の i 行 j 列の行列要素を $x_{i,j}$ とし，

$$
\begin{aligned}
x_{i,i} &= a \quad (i=1,2,\cdots,n)\\
x_{i,i+1} &= b \quad (i=1,2,\cdots,n-1)\\
x_{i+1,i} &= c \quad (i=1,2,\cdots,n-1)\\
x_{i,j} &= 0 \quad (|i-j|\geqq 2)
\end{aligned}
$$

と表されるものとする．ここで，a, b, c は実数とし，X_n の行列式を $|X_n|$ と表すものとする．次の問いに答えよ.

(1) $|X_2|$ と $|X_3|$ の値を求めよ.

(2) $|X_4|$ の値を求めよ.

(3) $n\geqq 4$ としたときの，$|X_n|$ を $|X_k|$ ($k\leqq n-1$ となる自然数) の中から適切なものを用いて表せ.

(4) $a=5$, $b=3$, $c=2$ としたとき，$|X_n|$ を求めよ.

(東京大類 29)　　(固有番号 s290705)

10.4 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a\\ -1 & 0 & 1 & b\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ -a & -b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a,b は実数とする.

(1) A の行列式を計算せよ.

(2) A が逆行列をもつための条件を a と b を用いて表せ.

(3) a と b が (2) の条件を満たすとき，A の逆行列を求めよ.

(信州大類 29)　　(固有番号 s291903)

10.5 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) 6 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3A & A\\ A & 2A \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(信州大類 30)　　(固有番号 s301903)

10.6 以下の行列 A の行列式の値を求め，A が正則になる実数 a を全て求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292005)

10.7　次の行列式 D の値を求めよ.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

(岐阜大類 29)　　(固有番号 s292604)

10.8　以下の条件※で定義される n 次正方行列 C_n について次の問いに答えよ.　ただし, n は正の整数とし, C_n の i 行 j 列の成分を c_{ij} とする.

条件※　i と j の少なくとも一方が 1 ならば　$c_{ij} = (-1)^{i+j+1}$

　　　その他の場合には　$c_{ij} = 0$

(1)　C_1 および C_3 の行列式をそれぞれ求めよ.

(2)　${C_3}^2$ を求めよ.

(豊橋技科大類 29)　　(固有番号 s292703)

10.9　行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1)　$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として, $\boldsymbol{r}' = A\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2)　行列式 A を求めよ.

(3)　逆行列 A^{-1} を求めよ.

(奈良女子大類 29)　　(固有番号 s293208)

10.10　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1)　$A = B\,{}^tB$ をみたし, すべての対角成分が正の下三角行列 B を求めよ.　ただし, ${}^tB$ は B の転置行列とする.

(2)　A の行列式の値を求めよ.

(3)　B の逆行列を求めよ.

(4)　A^{-1} の第 4 行を求めよ.

(神戸大類 30)　　(固有番号 s303802)

10.11 初期値 $F_1 = 1,\ F_2 = 1$ と漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ で定義される数列 $\{F_n\}$ をフイボナッチ数列という．例えば，$F_3 = F_2 + F_1 = 2,\ F_4 = F_3 + F_2 = 3$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) F_6 を求めよ．また，行列式

$$\det \begin{pmatrix} F_4 & F_5 \\ F_5 & F_6 \end{pmatrix}$$

の値を求めよ．

(2) $n \geqq 1$ に対して，2 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det A_n = (-1)^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(3) $n \geqq 1$ に対して，3 次の正方行列 B_n を

$$B_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det B_n = 0$ が成り立つことを示せ．

(4) 上の問い (3) で定義した B_n の余因子行列を $\tilde{B}_n$ とかくとき，$n \geqq 1$ に対して，$\det \tilde{B}_n = 0$ が成り立つことを示せ．

(岡山大類 29)　　(固有番号 s294003)

10.12 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ を計算せよ．

(広島大類 30)　　(固有番号 s304106)

10.13 行列 $P,\ Q,\ R,\ S$ を次のように定める．

$$P = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad Q = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix},\quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\quad S = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 6 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

以下の問いに答えよ．

(1) 次のうち，計算可能なものについてその計算をせよ．

(i) $S^2 - RQ$　　(ii) ${}^tPRS$　　(iii) $R\,{}^tQ + {}^t(Q\,{}^tR)$　　(iv) $SP - 2P$

(2) 行列 $P,\ Q,\ R,\ S$ のうち，正則行列であるものに対してその逆行列を求めよ．

(3) x を実数とする．行列 $T = S + \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ．また，T が正則でないとき，x の値を求めよ．

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294612)

10.14 4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(九州大類 29)　　(固有番号 s294701)

10.15 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294905)

10.16 次の行列式の値が 0 であるときの a を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295409)

11 連立方程式

11.1 変数 x, y, z の連立 1 次方程式

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & 1-a & 0 \\ 1+2a & 1+a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a-2 \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ.

(1) 連立 1 次方程式 $(*)$ が一意的な解を有するための a に関する必要十分条件を求めよ.

(2) 連立 1 次方程式 $(*)$ が解をもたないための a に関する必要十分条件を求めよ.

(3) 連立 1 次方程式 $(*)$ が無限に多くの解を有するための a に関する必要十分条件を求めよ.

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290106)

11.2 (1) $m \times n$ 型実行列 $A = (a_{ij})$ の階数 (rank) の定義を述べよ.

(2) t を実数とする．次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2t-2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \\ t & t-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) t を実数とする．4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-2 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を $V(t)$ で表す． t が実数全体を動くとき， $V(t)$ の次元の最小値をとるような t の値を求めよ．また，そのときの $V(t)$ の基底を求めよ.

(4) t を実数とする．未知数 x, y, z に関する次の連立 1 次方程式が解をもつような t をすべて求めよ．

$$\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & (2t-2)y & + & tz & = & 1 \\ x & & & + & z & = & t \\ tx & + & (t-1)y & + & z & = & 1 \end{cases}$$

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290604)

11.3 p, q を実数とする．連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & & & + & qz & = & 1 \\ -2x & + & py & - & 6z & = & 0 \end{cases}$$

が解を持たないとき，点 (p, q) が pq 平面内で動き得る範囲を図示せよ．

(東京工業大類 29)　　(固有番号 s290801)

11.4 次の 3 変数連立一次方程式を考える．

$$\begin{cases} cx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2c \\ x_1 & + & cx_2 & + & x_3 & = & c+1 \\ x_1 & + & x_2 & + & cx_3 & = & 3c-1 \end{cases}$$

ただし，c は定数である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 一意の解が得られるときのすべての c の値を求めよ．また，それぞれの c に対応する解を求めよ．

(2) 解が存在しないときのすべての c の値を求めよ．

(3) 解が一組より多くなるときのすべての c の値を求めよ．またそれぞれの c に対応する解を求めよ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291306)

11.5 次の ①, ② の連立方程式について，行列を用いて Y_1, Y_2 を求めよ．

$$(a+b)Y_1 - bY_2 = X_1 - X_2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$-bY_1 + (b+c)Y_2 = X_2 \quad \cdots\cdots ②$$

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292002)

11.6 k を定数とする．次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = -1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 2y + 7z = k \end{cases}$$

(岐阜大類 29)　　(固有番号 s292605)

11.7 (1) 次の x, y, z に関する連立一次方程式が，解を持たないための定数 k の条件を求めよ．

$$\begin{cases} & & - & 3y & + & z & = & -3 \\ & 3x & & & - & 2z & = & k \\ - & x & + & 2y & & & = & 1 \end{cases}$$

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ について，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考える．$\boldsymbol{b}$ として $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶとき，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ のそれぞれの解 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ を求めよ．

(名古屋工業大類 30)　　(固有番号 s302905)

11.8 実数 a,b,c に対して 4 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & c & -b \\ 1 & -c & 0 & a \\ 1 & b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) $a+b+c\neq 0$ のとき，A が正則行列であることを示せ．

(2) $a+b+c=0$ のとき，4 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ で，$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすものをすべて求めよ．

(京都工芸繊維大類 29)　　(固有番号 s293401)

11.9 c を実数とし，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & c & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $c=6$ のとき，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ．

(2) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つための c の条件を求めよ．

(3) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持たないとき，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の一般解を求めよ．

(広島大類 29)　　(固有番号 s294101)

11.10 a を実数とし，行列 A を次のように定める．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & a \\ a & a & -1 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数 rank A を求めよ．

(2) $a=1$ のとき，実数 x,y,z を未知数とする連立 1 次方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ の解を求めよ．

(3) 実数 x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$ が唯一つでない解を持つとき，a の値を求めよ．また，このとき，この連立 1 次方程式の解を求めよ．

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294613)

11.11 係数行列の逆行列を求めることにより，$x,\ y$ を求めなさい．

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295410)

11.12 次の行列 $A,\ B,\ C$ とベクトル $\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}$ について，あとの問いに答えなさい，解答は途中の式も省略せずに書きなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(1) AB と BA をそれぞれ答えなさい．定義されないときには「定義されない」と答えなさい．

(2) 行列式 $|A|,\ |C|$ をそれぞれ答えなさい．

(3) 行列 $A,\ C$ の逆行列をそれぞれ答えなさい． 定義されないときには「定義されない」と答えなさい．

(4) ベクトル $\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}$ の組が線形独立か線形従属か 理由とともに 答えなさい．

(5) 次の連立一次方程式の解を 行列を使用して 求めなさい． 行列を使用したことが分かるように，途中経過を示しなさい．

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 5 \\ x + y + z = -7 \\ x + 3y + 9z = -5 \end{cases}$$

(岩手県立大類 29)　　(固有番号 s297001)

12 線形変換

12.1 3 次元デカルト座標系で (x, y, z) と表される点を任意の軸のまわりに回転させる演算子に関して，次の設問に答えよ．

(1) 点 (x, y, z) を z 軸のまわりに，その軸の正方向からみて反時計回りに角度 ϕ 回転させる演算子を，3 行 3 列の行列 $R_z(\phi)$ で表す．このとき，$R_z(\phi)$ を求めよ．

(2) 設問 (1) の $R_z(\phi)$ において，角度 ϕ が微小量 ϵ であるとき，ϵ の 2 次のオーダーまで考慮して $R_z(\epsilon)$ を求めよ．

(3) 設問 (1)，(2) と同様にして，x 軸，y 軸のまわりの回転を表す行列 $R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)$ を，それぞれ ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で求めよ．

(4) $R_x(\epsilon)$ と $R_y(\epsilon)$ の交換関係を $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ と書き，$[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)] = R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon)$ とする．このとき $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ を ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で，単位行列 I と $R_z(\epsilon^2)$ を用いて表せ．

(山梨大類 29)　　(固有番号 s291803)

12.2 X-Y 座標平面上に点 $A(x_1,\ y_1)$ がある．原点を中心として点 $A(x_1,\ y_1)$ を $45°$ 回転した時の座標点 $B(x_2,\ y_2)$ を求めよ．また点 $A(x_1,\ y_1)$ を，点 $P(1,2)$ を中心として $60°$ 回転した時の座標点 $C(x_3,\ y_3)$ も求めよ．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292003)

12.3 2 次元デカルト座標系において，1 次変換 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ を考える．この変換をベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)^T$ に作用させ，変換後に得られるベクトル $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の方向が変換前のベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向と一致し $\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}$ のように表せるとき，このベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を求めよ．ただし，ベクトルの長さは $||\boldsymbol{x}|| = 1$ であるものとする．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292007)

13　固有値とその応用

13.1 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ で定める．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) n は自然数とする．A^n を求めよ．

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290105)

13.2 次の行列 $\boldsymbol{A}$ に関して以下の設問に答えなさい．ただし，a と b は実数とする．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -b^2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ が異なる二つの固有値をもつための条件を示しなさい．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が 2 と 4 のとき，a と b を求めなさい．

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が 2 と 4 のとき，A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする．

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290109)

13.3 a, b を実数とし，$ab \neq 0$ とする．行列 A を，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の固有値を求めなさい．

(2) (1) で求めた固有値の固有ベクトルを，ひとつずつ求めなさい．

(3) (2) で求めた固有ベクトルの図形的関係を答えなさい．

(秋田大類 29)　　(固有番号 s290404)

13.4 実数 x を含む次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & -x-1 & 0 \\ x-1 & -x & 0 \\ 1-x & x+1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}^2$ と逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{B}$ を次式で定義する．n が 3 以上の整数であるとき，$\boldsymbol{B}$ を n と x を用いて表せ．

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^n + n\boldsymbol{A}^{n-1} - \boldsymbol{A}^{n-2} \qquad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大類 29)　　(固有番号 s290501)

13.5　3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(2) x, y, z の連立方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は解を持つか，その理由も答えよ．

(東北大類 29)　　(固有番号 s290504)

13.6　実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．変換に用いた直交行列も答えること．

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290607)

13.7　以下の 2 次正方行列 A について答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ．

(2) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290611)

13.8　2 つの正方行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし，行列 C を $C = BAB^{-1}$ とする．以下の問いに答えよ．なお，以下では任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対し $\overrightarrow{x}^T$ はその転置を表すものとする．また，行列 I を単位行列とし，ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する．

(1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ．

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}^T \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}$$

とおく．ただし，n は $n > 1$ を満たす整数，$\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである．

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は，ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる．

$$\overrightarrow{x} = \boxed{\text{(ア)}} \left(\sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{(イ)}} \right) \overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け．必要であれば a_1，a_2，a_3，n，k を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して，$n \to \infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を a_1，a_2，a_3 を用いて表せ．

(東京大類 30)　　(固有番号 s300705)

13.9

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．

(2) 正の整数 n に対して A^n を求めよ．

(東京工業大類 29)　　(固有番号 s290802)

13.10 r は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & r & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えなさい．

(1) $A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つとき，r の値を求めなさい．

(2) r は (1) で求めた値とする．そのときの A の固有値を λ_1，λ_2，λ_3 とする．ただし $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ とする．A の固有値 λ_1 に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい．

(東京農工大類 29)　　(固有番号 s290903)

13.11 次の 3 次正方行列 A に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ -24 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ.

(電気通信大類 29)　　(固有番号 s291001)

13.12 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ および, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(2) A^n を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ. また, その求め方を説明せよ.

(3) B^n を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ. また, その求め方を説明せよ.

(横浜国立大類 29)　　(固有番号 s291103)

13.13 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えなさい.

(1) 行列 A は, 異なる二つの実数の固有値 λ_1, λ_2 を持つ（ただし, $\lambda_1 < \lambda_2$）. λ_1, λ_2 を求めなさい.

(2) 行列 A は, ある直交行列 Q によって $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ と対角化できる. この直交行列 Q を求めなさい. （なお, 実正方行列 Q が ${}^tQQ = I$（I は単位行列）を満たすとき, Q を直交行列という）

(千葉大類 29)　　(固有番号 s291202)

13.14 (1) 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい.

(2) 設問 (1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(千葉大類 29)　　(固有番号 s291206)

13.15 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ とするとき, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる. そのように選んだ $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ を 1 組求めよ.

(3) A を $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 R, および, その逆行列 R^{-1} を答えよ.

(4) x, y, z をそれぞれ任意の実数とし, ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で定義する.

また, $\boldsymbol{u}^T = (x \quad y \quad z)$ とする. このとき, x, y, z を変数とする関数 $f(x, y, z) = \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{u}$ について考える.

(a) (3) で求めた R を用いて新たな変数 $X,\ Y,\ Z$ を $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^{-1}\boldsymbol{u}$ で定義し，

$f(x,y,z)$ を $X,\ Y,\ Z$ の関数 $f(x,y,z) = F(X,Y,Z)$ と表す．このとき，関数 $F(X,Y,Z)$ を $X,\ Y,\ Z$ の式で表せ．

(b) 任意の $x,\ y,\ z$ に対して，$f(x,y,z) \geq 0$ であることを示せ．また，$f(x,y,z) = 0$ を満たす $x,\ y,\ z$ を求めよ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291303)

13.16 3 次元実数ベクトル空間 V_α に $x_1x_2x_3$ 直交座標軸を固定し．2 次曲面

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 式 ① を以下の 2 次曲面の標準形の式

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

で表すとき，$A,\ \boldsymbol{b},\ c$ を求めよ．ただし，A は実対称行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトル，${}^tA$ は A の転置行列を示し，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ x_3)$ とする．

(2) 上記 (1) の A は適当な直交行列 P を用いて対角行列 $T = {}^tPAP$ にすることができる．T と P を求めよ，導出過程も示せ．ただし，対角行列 T の対角成分 t_{ii} $(t = 1,2,3)$ は $t_{11} \geq t_{22} \geq t_{33}$ とし，直交行列 P の第 2 列は ${}^t(1,2,1)$ に平行にとること．

(3) 3 次元実数ベクトル空間 V_β において $y_1\ y_2\ y_3$ 直交座標軸を固定する．いま，V_α の元 $\boldsymbol{x}$ と V_β の元 $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3)$ との間で

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成立するものとする．ここで P は (2) で得られた直交行列である．式 ② の 2 次曲面を，$T, b, \boldsymbol{y}$ を用いた式で表せ．

(4) 上記 (3) で得られた式を，$y_1,\ y_2,\ y_3$ を用いて書き直せ．

(5) 上記 (4) で表される 2 次曲面を y_1 軸周りに回転させたところ．平面 $y_3 = 0$ について対称となった．回転後の 2 次曲面を表す式を求めよ．導出過程も示すこと．また，この 2 次曲面の概形を $y_1y_2y_3$ 座標系で描け．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291305)

13.17 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を正の成分をもつ実ベクトルとし，

$$A_x = D_x - \frac{\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{x}}{\sum_{i=1}^m x_i}$$

とおく．ただし，D_x は $D_x = \mathrm{diag}\,(x_1, \cdots, x_m)$ なる対角行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置とする．

(1) 0 が A_x の固有値になることを示し，対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) 任意の実ベクトル $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ に対して，${}^t\boldsymbol{y}\,A_x\,\boldsymbol{y} \geq 0$ を示せ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291315)

13.18 行列 A が次式で与えられるものとして以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A は対角化可能かどうか判定せよ．可能であれば，対角化せよ.

(埼玉大類 29)　　(固有番号 s291405)

13.19 実数を成分とする 3 次正方行列 A のうち，$A^3 = O$ かつ $A^2 \neq O$ を満たすもの全体の集合を X とする．ただし O は 3 次零行列とする．以下の各問いに答えよ.

(1) X の元を 1 つあげよ.

(2) X の任意の元 A の行列式は 0 であることを示せ.

(3) X の任意の元 A の固有値はすべて 0 であることを示せ.

(4) A を X の元とする．$\boldsymbol{a}$ を $A^2\boldsymbol{a}$ が零ベクトルでない 3 次実ベクトルとするとき，$\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ.

(茨城大類 29)　　(固有番号 s291701)

13.20 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2a & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，a は実数とする.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の最大の固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(信州大類 29)　　(固有番号 s291904)

13.21 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b は実定数で，$b > 0$ とする.

(1) A の固有値がすべて正になる条件を a, b を用いて表せ.

(2) A の固有ベクトルでその成分がすべて正となるものを 1 つ求めよ.

(信州大類 30)　　(固有番号 s301904)

13.22 以下のように行列 A, B, C を定義する.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，I を 3×3 の単位行列とする．ここで，i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し，定数 k を求めよ.

(2) A の固有値を求めよ.

(3) 一般に，正方行列 M の指数関数 e^M は，無限級数 $e^M \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義される．α を実定数としたとき，

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

(問題ではこうなっていましたが, $(2,2)$ 成分は 1 になるものと思われます)

となることを示せ.

(4) ベクトル $\overrightarrow{v}(\phi)$ を $\overrightarrow{v}(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{i\cos\phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する．

このとき，$e^{i\alpha C}\overrightarrow{v}(\phi) = \overrightarrow{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ．ただし，ϕ と ϕ' は実定数である．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292017)

13.23 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め，A を対角化せよ．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292020)

13.24 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき，下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次正方行列 P を 1 つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ と P^{-1} を求めなさい．

(3) 自然数 n について，A^n を求めなさい．

(長岡技科大類 29)　　(固有番号 s292101)

13.25 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A を対角化せよ．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，関数 $f(\boldsymbol{x})$ を $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と定めると，$f(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ であることを示せ．さらに $f(\boldsymbol{x}) = 0$ となる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ を求めよ．ただし ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(3) $A = B^2$ となる行列 B を求めよ．

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292202)

13.26 行列　$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) I を 3 次の単位行列とするとき，A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ．

(3) 行列 $A^4 - 10A^2$ を求めよ．

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292206)

13.27 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい．

(2) ある行列 V を用いて，行列 $A' = V^{-1}AV$ を対角行列にすることができる．V と A' を求めなさい．

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292212)

13.28 次の問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ は 2 行 2 列の実数行列，$\boldsymbol{X}$ は 2 行 1 列の実数行列とする．また，${}^t\boldsymbol{X}$ は行列 $\boldsymbol{X}$ の転置行列を意味する．

(1) $|\boldsymbol{A}| < 0$ のとき，$\boldsymbol{A}$ の固有値が異符号の実数であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{B}$ の成分がいずれも正であるとする．このとき，$\boldsymbol{B}$ の固有値が実数であるとしても正とは限らないことを例を挙げて示せ．

(3) $\boldsymbol{C}$ が対角行列で対角成分がいずれも正であるとき，任意の $\boldsymbol{X}$ に対して ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} > 0$ が成立することを示せ．

(4) $\boldsymbol{D}$ が 2 つの異なる正の固有値をもち，それらの固有値に対応する固有ベクトルが直交しているとき，任意の $\boldsymbol{X}$ に対して ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} > 0$ が成立することを示せ．必要ならば，直交行列の逆行列と転置行列が等しくなる性質を利用せよ．なお，直交行列とは，互いに直交する大きさが 1 の列ベクトルからなる正方行列である．

(富山大類 29)　　(固有番号 s292304)

13.29 次の行列 A, B に関して，次の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 B が対称行列であるとき，定数 a, b を求めよ．

(3) (2) のとき，行列 B の固有値をすべて求めよ．

(豊橋技科大類 29)　　(固有番号 s292702)

13.30 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ．また，最も小さい固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(豊橋技科大類 30)　　(固有番号 s302703)

13.31 定数 a を含む行列 A と未知変数 x, y, z に関する次の方程式を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

以下の設問に計算手順を示し解答せよ．

(1) 方程式がただひとつの解をもつための，定数 a が満たすべき条件を示せ．

(2) $a = 0$ とする．方程式の解を求めよ．

(3) $a = 4$ とする．このとき，A の固有値のひとつは 2 である．

(a) 固有値 2 に属する A の固有ベクトルをひとつ求めよ．なお固有ベクトルの大きさ（ノルム）は 1 とする．

(b) 残りの A の固有値をすべて求めよ．

(名古屋大類 29)　　(固有番号 s292801)

13.32 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A を直交行列によって対角化せよ．

(2) $A = B^2$ を満たす対称行列 B を一つ求めよ．

(名古屋工業大類 29)　　(固有番号 s292903)

13.33 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) グラム・シュミットの正規直交化法で，(1) で求めた固有ベクトルから正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ．

(名古屋工業大類 30)　　(固有番号 s302906)

13.34 ある 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい．

(1) この行列 A の固有値を求めなさい．

(2) この行列 A の固有ベクトルを求めなさい．

(3) A^n の値を求めなさい

(三重大類 29)　　(固有番号 s293101)

13.35 x, y に関する実数値関数 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めなさい.

(2) A の全ての固有値と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような正規直交行列 T を求めなさい．さらに，$T^{-1}AT$ を求めなさい.

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により変数変換をすることで，$f(x,y)$ を変換した結果得られる $g(u,v)$ を求めなさい．また，$g(u,v) = 4$ の概形を u-v 平面上に描きなさい.

(三重大類 29)　　(固有番号 s293108)

13.36 (1) 次の行列 A とベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を求めよ．またベクトル $\overrightarrow{v}$ と $A\overrightarrow{v}$ の内積 $\overrightarrow{v} \cdot A\overrightarrow{v}$ を求めよ．ただし，a, b, c, x, y は実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 A の行列式 $|A|$ と，２つの固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) (1) の $\overrightarrow{v}$ が $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} > 0$ を満たし，(2) の行列式が $|A| \neq 0$ を満たすとき，(1) の内積が $\overrightarrow{v} \cdot A\overrightarrow{v} > 0$ となる十分条件は，$a > 0$, $c > 0$ かつ $|A| > 0$ であることを証明せよ.

(三重大類 29)　　(固有番号 s293115)

13.37 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) すべての固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とする.

(2) 関数 $f(x,y,z)$ の x, y, z についての偏導関数をそれぞれ $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$，関数 $g(x,y,z)$ の x, y, z についての偏導関数をそれぞれ $g_x(x,y,z)$, $g_y(x,y,z)$, $g_z(x,y,z)$ とする．関数 $f(x,y,z)$ が条件 $g(x,y,z) = 0$ のもとで点 (a,b,c) において極値をとり，$g_x(a,b,c) \neq 0$ または $g_y(a,b,c) \neq 0$ または $g_z(a,b,c) \neq 0$ ならば，次の式を満たす実数 λ が存在する.

$$f_x(a,b,c) - \lambda g_x(a,b,c) = 0$$

$$f_y(a,b,c) - \lambda g_y(a,b,c) = 0$$

$$f_z(a,b,c) - \lambda g_z(a,b,c) = 0$$

条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで，次の関数 $f(x,y,z)$ が最小値をとる (x,y,z) を求めよ.

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(大阪大類 29)　　(固有番号 s293503)

13.38 行列 $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{C})$ に対して，次の問に答えよ.

以下，I は 3 次の単位行列を表し，ω は 1 の 3 乗根 $\omega = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ を表す.

(1) Λ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A が $A = aI + b\Lambda + c\Lambda^2$ と表されることを用いて，A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) 等式 $\det(A) = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$ を示せ.

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293801)

13.39 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対して固有ベクトル空間を求めよ.

(3) $B = P^{-1}AP$ となるような直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

(神戸大類 30)　　(固有番号 s303801)

13.40 (1) 3 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(2) $x,\ y,\ z$ を変数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y - 2z = a \\ 2x + y + z = b \\ 3y + 5z = c \end{cases}$$

が解をもつための $a,\ b,\ c$ の条件を答えよ．また，その一般解を求めよ.

(岡山大類 29)　　(固有番号 s294004)

13.41 行列 A，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし，写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$f(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \cdot (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

ただし，$\cdot$ はベクトルの内積を表す．以下の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ.

(3) A の固有値 0 に対する固有ベクトルを一つ求めよ.

(4) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ の中で最も原点に近い $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(広島大類 29)　　(固有番号 s294103)

13.42 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を零ベクトルでない k 次元実列ベクトルとし，k 次実対称行列 $M_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ を

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{a}_i$$

で定義する．ここで，^{t} は転置を表す記号である．以下の問いに答えよ．ただし，任意の実対称行列は直交行列により対角化可能であることは用いてよい.

(1) α_n を行列 M_n の $(1,1)$ 成分とする．数列 $\{\alpha_n\}$ が広義の単調増加列，すなわち，
$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$ となることを示せ．

(2) M_n の固有値はすべて非負の実数であることを示せ．

(3) λ_n を M_n の最小固有値とする．$S = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = 1\right\}$ に対し，

$$\min_{x \in S} {}^t\boldsymbol{x} M_n \boldsymbol{x} = \lambda_n$$

を示せ．

(4) (3) で定義した λ_n に対して，数列 $\{\lambda_n\}$ が広義の単調増加列となることを示せ．

(5) (1) で定義した α_n と (3) で定義した λ_n に対して，$\{\alpha_n\}$ が上に有界であれば，$\{\lambda_n\}$ は収束することを示せ．

(広島大類 29)　　(固有番号 s294105)

13.43 (1) 方程式 $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ が表す座標平面上の 2 次曲線を図示せよ．

(2) (1) の 2 次曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) (1) の 2 次曲線上での xy の最小値を求めよ．

(広島大類 30)　　(固有番号 s304103)

13.44 A, B を n 次正方複素行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & -1 & i \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし i は虚数単位である．

(2) ある n 次正則行列 P が存在して $P^{-1}AP = B$ が成り立つとき，A と B の固有値の集合は一致することを示せ．

(3) A が正則であるとき，AB と BA の固有値の集合は一致することを示せ．

(4) $AB = BA$ が成り立つとき，A と B は少なくとも 1 つの共通の固有ベクトルを持つことを示せ．

(広島大類 30)　　(固有番号 s304105)

13.45 次に示す行列 A の固有値が全て負の実数となるとき，x のとりうる範囲を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & x^2 - 1 & -1 \\ 0 & 0 & x - 0.5 \end{pmatrix}$$

(山口大類 29)　　(固有番号 s294302)

13.46 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(高知大類 29)　　(固有番号 s294501)

13.47 A を $A^2 = O$（零行列）を満たす複素数を成分とする 4 次の正方行列とする．さらに，$A\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{q}$ が一次独立となる 4 次元複素ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ があるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $A\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{q}$ は一次独立であることを示せ．

(2) 行列 A の固有値と階数を求めよ.

(3) $P = (A\boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{p} \quad A\boldsymbol{q} \quad \boldsymbol{q})$ とおくと P は正則であることを示し，さらに

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(高知大類 29)　　(固有番号 s294505)

13.48 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた行列 A の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294605)

13.49 (1) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

について考える.

(a) A の固有値を全て求め，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(b) 適当な正則行列 P を用いて，行列 A を対角化せよ.

(2) a を実数とし，行列

$$B = \begin{bmatrix} 1+a & a & 0 & 0 \\ -a & 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

を考える. B の固有値を全て求め，各固有値に対する固有空間の次元を求めよ.

(愛媛大類 29)　　(固有番号 s294607)

13.50 x は実数とし，n は 2 以上の自然数とする. A は n 次の正方行列で，その対角成分はすべて x，それ以外の成分はすべて 1 であるとする. このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) すべての成分が 1 である n 次の列ベクトル（縦ベクトル）を $\boldsymbol{v}$ で表す. このとき，n と x に依存して決まるある実数 c_n に対して $A\boldsymbol{v} = c_n\boldsymbol{v}$ が成り立つことを示せ，また，c_n を求めよ.

(2) $c_n = 0$ となる x の値を x_n とおく. x_n を求めよ.

(3) $n = 3, x = x_3$ の場合に，A の固有値をすべて求めよ.

(4) $n = 4, x = x_4$ の場合に，A の階数 (rank) 求めよ.

(5) n は 2 以上の任意の自然数とし，$x = x_n$ とする. A の n 個の列ベクトル（縦ベクトル）を左から順に $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ とする. このとき，$A\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ を用いて表せ. また，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ は一次独立であるか，それとも一次従属であるか，答えよ. その理由も示すこと.

(九州大類 29)　　(固有番号 s294702)

13.51　a, b を実数として，次の行列 A について考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ a & b & 3 \end{pmatrix}$$

(1)　A が正則であるための条件を求めよ．

(2)　A に掃き出し法（ガウスの消去法）を適用して次の行列 U を得たとする．

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

この時，a, b を用いて c を表せ．

(3)　U の各列ベクトルが直交するように a, b, c を求めよ．

(4)　a, b, c が小問 (3) を満たすとき，$A = LU$ が成り立つような行列 L を求めよ．

(5)　a, b, c が小問 (3) を満たすとき，U の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(九州大類 29)　　(固有番号 s294704)

13.52　次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294906)

13.53　行列 $A = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　行列 A の行列式の値が 0 になる k を求めよ．

(2)　$k = 4$ であるとき，行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ，

(3)　$k = -3$ であるとき，行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ，

(4)　(3) の条件において，行列 A を対角化せよ．

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294909)

13.54　行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　行列式 $\det A$ を求めよ．

(2)　逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3)　行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4)　行列 A を対角化して得られる行列 B を求めよ．また，$B = PAP^{-1}$ を満たす正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(佐賀大類 29)　　(固有番号 s294920)

13.55　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えなさい．

(1) A の逆行列を求めなさい.

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(3) A は対角化可能かどうか調べ，その理由を示しなさい.

(4) A^n を求めなさい.

(熊本大類 29)　　(固有番号 s295201)

13.56 下記の行列 A について以下の問いに答えよ．ただし，虚数単位は i とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) A の 2 つの固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

(鹿児島大類 29)　　(固有番号 s295405)

13.57 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求め，各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $AX = BA$ を満足する行列 X を求めよ.

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295506)

13.58 以下に示す対称行列 $\boldsymbol{A}$ について各設問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(4) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(香川大類 29)　　(固有番号 s295705)

13.59 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ.

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t)$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を求めよ．ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとして求めること.

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルが互いに直交していることを示せ.

(3) 固有ベクトルからなる行列 $T = [\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2]$ の逆行列 T^{-1} を求めよ.

(4) $\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{y}(t)$ の変数変換を行い，$\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を導け.

(5) 設問 (4) で求めた $\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を解け.

(6) 設問 (5) で求めた解 $\boldsymbol{y}(t)$ を用い，微分方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ.

(島根大類 29)　　(固有番号 s295802)

13.60 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．

(島根大類 29)　　(固有番号 s295803)

13.61 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の (1)，(2) を求めなさい．

(1) この行列の固有値

(2) この行列の固有ベクトル

(和歌山大類 29)　　(固有番号 s296506)

14 線形空間など

14.1 実数を成分とする 4 次元列ベクトル全体のなす実ベクトル空間を $\mathbb{R}^4$ で表す．$\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を考える．a_1 と a_2 が生成する部分空間を W_1 とし，a_3 と a_4 が生成する部分空間を W_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) W_1 および W_2 の次元を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ の次元を求めよ．

(3) $W_1 \cap W_2$ の基底を求めよ．

(東北大類 29)　　(固有番号 s290505)

14.2 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \text{に，} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} \text{に，} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{に，}$$

それぞれ写すとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線形写像 f を表す行列 A を求めよ．

(2) 線形写像 f の核 ($\mathrm{Ker}\ f$) と像 ($\mathrm{Im}\ f$) の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290606)

14.3 p, q を実数とし，3 次正方行列 A, B を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & q \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\,,\qquad g(\boldsymbol{x})=B\boldsymbol{x}\qquad(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\,f$ の次元を求め，その基底を１組求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ が $\mathrm{Im}\,f$ に含まれるための x,y,z の条件を求めよ．

(3) $g(\mathrm{Im}\,f)\subset\mathrm{Im}\,f$ となるような p,q の値を求めよ．ただし，$g(\mathrm{Im}\,f)=\{g(x)\,|\,\boldsymbol{x}\in\mathrm{Im}\,f\}$ とする,.

(電気通信大類 29)　　(固有番号 s291002)

14.4 $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ を次のように定義された線形写像とする．

$$F(x,y,z,w)=(x-y+z+w,\ 2x-2y+3z+4w,\ 3x-3y+4z+5w)$$

すべての $(x,y,x,w)\in\mathbb{R}^4$ に対して．３次元ベクトル $F(x,y,z,w)$ の集合は $\mathbb{R}^3$ の部分区間となる．それを Im (F) と表す．また，$F(x,y,z,w)=(0,0,0)$ となる４次元ベクトル (x,y,z,w) の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間となる．それを Ker (F) と表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) Im (F) の次元と基底ベクトルを求めよ．

(2) Ker (F) の次元と基底ベクトルを求めよ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291307)

14.5 実ベクトル空間 W のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ が次の２つの条件を満たしているものとする．

(A) $||\boldsymbol{v}_1||=\cdots=||\boldsymbol{v}_1||=1$

(B) 相異なる $j,k\in\{1,\cdots,n\}$ に対して $\langle\boldsymbol{v}_j,\ \boldsymbol{v}_k\rangle=0$

ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は W の内積，$||\quad||$ はこの内積で定まる長さを表す．　また，$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ の１次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を V とする．以下の (1)-(4) を証明しなさい．

(1) $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ は１次独立である．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in V$ が実数 $x_1,\ \cdots x_n$ を用いて

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\boldsymbol{v}_j$$

と表されるとき，次の等式が成り立つ．

$$||\,\boldsymbol{x}\,||^2=\sum_{j=1}^{n}{x_j}^2$$

(3) V は W の部分空間である．

(4) $V\neq W$ であれば，$\boldsymbol{w}\notin V$ かつ $\boldsymbol{w}\in W$ を満たす任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{w}$ は１次独立である．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291313)

14.6 a を０と異なる実数とし，３次実正方行列を $A=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\a&a&0\end{pmatrix}$ で与える．

(1) A が与える数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の上の線形変換を

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \qquad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

で表す．この f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ および 像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を１組ずつ求めよ．

(2) $ABA = O$ を満たすすべての３次実正方行列 B の中で，階数が最大であるものを１つ求めよ．ただし，O は零行列を表す．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291314)

14.7 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3)$ を考える．$f_i(x)$ と $f_j(x)$ との内積 $(f_i,\ f_j)$ を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) f_j(x) dx$ と定義するとき，$i,\ j$ をそれぞれ $1, 2, 3$ のいずれかとして，次の設問に答えよ．

(1) $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x + 1\right)$，$f_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x - 1\right)$ とすると，$(f_1,\ f_1) = (f_2,\ f_2) = 1$，$(f_1,\ f_2) = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $f_3(x) = ax^2 + b$ $(a,\ b$ は定数) とするとき，$(f_1,\ f_3) = (f_2,\ f_3) = 0$，$(f_3,\ f_3) = 1$ となるような $a,\ b$ を求めよ．

(3) $f_i(-x) = Mf_i(x)$ のように，x を $-x$ と変換する操作を M と書く．M によってベクトル $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ はどのように変換されるか，その行列表現を求めよ．

(4) 直交行列 A によってベクトル $\boldsymbol{f}$ が，ベクトル $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f}$ に移るとする．操作 M によって $\boldsymbol{g}$ がその定数倍になるような A と $\boldsymbol{g}$ を求めよ．

(山梨大類 29)　　(固有番号 s291802)

14.8 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 W_1 を次のように定める．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

このとき，次の各問いに答えよ．

(1) W_1 は $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間になることを示せ．

(2) W_1 の基底を求めよ．

(3) 線形変換 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の像 $\mathrm{Im}(f) = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \right\}$ が W_1 であると仮定する．このとき，f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ．

(4) W_2 は $\mathbb{R}^4$ の 2 次元線形部分空間で，$W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間であると仮定する．このとき，$W_1 = W_2$ となることを示せ．

(新潟大類 29)　　(固有番号 s292022)

14.9 k を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2k \\ 1 & 2k & 2 \\ k & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ.

(2) A による $\boldsymbol{R}^3$ の変換

$$f : \boldsymbol{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える.

(a) f が $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換であることを示せ.

(b) f の像 ($\mathrm{Im}\, f$) の次元が 2 のとき，f の核 ($\mathrm{Ker}\, f$) の次元と基底の 1 組を与えよ.

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292201)

14.10 a, b を定数とするとき，R^4 の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} x + 3y + 5z - w = a \\ x - y - 3z + 3w = b \\ 2x - y - 4z + 5w = 0 \end{array} \right\}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) W が R^4 の部分空間となるように a, b の値を定めよ.

(2) a, b が (1) で定めた値のとき，W の次元と基底を求めよ.

(名古屋工業大類 29)　　(固有番号 s292904)

14.11 X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ を写像とする．A_i, A で X の任意の部分集合を，B で Y の任意の部分集合を表すとき，次の主張（命題）のそれぞれについて，正しければ証明をし，正しくなければ反例を挙げよ.

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(3) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

ここで $f(A)$ は A の f による像を，$f^{-1}(B)$ は B の f による逆像を表す:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \;, \qquad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293806)

14.12 a を実数とする．自然数 n に対して，対角成分が全て a であり，それ以外の成分が全て 1 である n 次正方行列を A_n とする．以下の各問いに答えよ

$$A_n = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

(1) $|A_n| = (a + n - 1)(a - 1)^{n-1}$ であることを示せ．ただし $0^0 = 1$ とする.

(2) $a = 1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ.

(3) $a = -n + 1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ.

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293807)

14.13 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ とする．また，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とし，この基底についての表現行列が A である $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像を T とする．以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T)$ と像 $\mathrm{Im}(T)$ の基底をそれぞれ求めよ．なお，基底を構成するベクトルは $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表すこと.

(4) n を自然数とするとき，T の n 回の合成を T^n で表す． $T^n(\boldsymbol{a}_1)$, $T^n(\boldsymbol{a}_2)$, $T^n(\boldsymbol{a}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ.

(神戸大類 29)　　(固有番号 s293808)

14.14 a, b を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -6 \\ 2 & -6 & b \end{pmatrix}$ によって表される $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像をそれぞれ f, g とおく．以下の問いに答えよ.

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ.

(2) g の核 $\mathrm{Ker}\, g$ の次元を求めよ.

(3) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ となるために a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ.

(広島大類 30)　　(固有番号 s304101)

14.15 実ベクトル空間 V, W の間の一次写像 $f : V \to W$ について次の問いに答えよ.

(1) f の核を $\mathrm{Ker}\ f$ とおき，V の零ベクトルを $\mathbf{0}_V$ とおく．f が単射であることの必要十分条件は $\mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0}_V\}$ であることを示せ.

(2) f が単射で，V の k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立であるならば， これらの f による像 $f(\boldsymbol{a}_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}_k)$ も一次独立であることを示せ.

(3) 実ベクトル空間としての V, W の次元をそれぞれ m, n とおく．f が単射であるならば，$m \leqq n$ であることを示せ.

(高知大類 29)　　(固有番号 s294504)

14.16 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるような線形写像とする，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ と像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ.

(島根大類 29)　　(固有番号 s295804)

14.17 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - 3y + z = 0 \right\}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(2) W の次元を求めよ．

(3) $\boldsymbol{v}$ を W に属さない $\mathbb{R}^3$ のベクトルとし，$U = \{k\boldsymbol{v} \mid k \in \mathbb{R}\}$ とする．このとき，次が成り立つことを示せ．

$$W + U = \mathbb{R}^3 , \qquad W \cap U = \{0\}$$

ただし，$W + U = \{\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \in W,\ \boldsymbol{u} \in U\}$ である．

(島根大類 29)　　(固有番号 s295805)

14.18 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f \ :\ R^4 \to R^3 , \qquad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の階数 rank A を求めよ．

(2) f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を求めよ．

(はこだて未来大類 29)　　(固有番号 s296301)

応用数学

15 応用数学

15.1 二つの複素数 $z_1 = a + bi$ と $z_2 = c + di$ （i は虚数単位，a, b, c, d は実数，$z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0$）に関して以下の設問に答えなさい．

(1) z_1 に z_2 を乗じたところ，その積 z_1z_2 は，絶対値と偏角がともに z_1 の 2 倍である複素数となった．z_2 を a と b を用いて表しなさい．ただし，偏角の範囲はすべての実数とする．

(2) z_1 と z_2 が設問 (1) の条件を満たし，かつ，積 z_1z_2 が純虚数となるとき， z_1 の取り得る値を複素数平面上に図示しなさい．

(北海道大類 29)　　(固有番号 s290111)

15.2 以下の問いに答えよ．i は虚数単位はとする．

(1) 実数 a は $|a| < 1$ 満たすとする．留数定理を用いて，複素積分

$$\int_C \frac{dz}{(z + ai)(az + i)}$$

を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(2) $0 < \gamma < \pi/2$ として，積分値

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos\gamma \sin\theta}$$

を次の手順で求めよ．

(a) $z = e^{i\theta}$ と変数変換を行うことにより複素積分に変形する．このとき，

$$I = \int_C f(z) dz$$

を満たす複素関数 $f(z)$ を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(b) 複素関数 $f(z)$ の極を全て求めよ．

(c) 積分路 C 内に含まれる極を全て求めよ．

(d) 留数定理を用いて，積分値 I を求めよ．

(東京大類 29)　　(固有番号 s290704)

15.3 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = r f(r,z) \overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\big(z f(r,z)\big)$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r,θ,z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

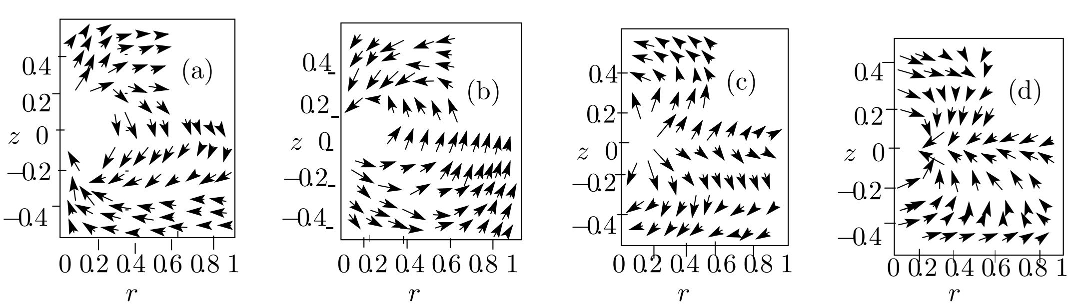
(1) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \le r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ．



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_- > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0，z_1，z_2 を用いて，表わせ．

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大類 30)　　(固有番号 s300703)

15.4 i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $-i$ の 3 乗根

$$A = (-i)^{1/3}$$

を考える．

(a) A を全て求めて $a + ib$ の形で答えよ．a と b は実数とする．ただし，最終的な a と b の表式に三角関数を用いてはならない．

(b) A を全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) x と y を実数として複素数 $z = x + iy$ を考える．次の関数に関して以下の問いに答えよ．

$$u = \sin x \cosh y$$

(a) u を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ を求めよ．

(b) $\dfrac{dw(z)}{dz}$ を求めよ．

(3) 次の複素関数積分 I を考える．

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 3iz^4/2 + z^3} dz$$

ただし，積分路は複素平面上の単位円周上を反時計回りに一周するものとする

(a) 全ての極と対応する次数と留数を求めよ．

(b) 積分 I を求めよ．

(東京大類 30)　　(固有番号 s300704)

15.5 以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) 複素数平面において $|z| = 1$ 上を正の向きに 1 から i に至る曲線を C_1 とし，i から 1 に至る積分を C_2 とする，このとき，次の複素積分 I_1，I_2 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{dz}{z^2}\,, \qquad I_2 = \int_{C_2} \frac{dz}{z^2}$$

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 1}$ に対して，次の複素積分 I の値を求めよ．

$$I = \int_{|z-1|=1} f(z) dz \qquad \text{（積分路は正の向きに 1 周）}$$

(3) 複素関数 $g(z) = \dfrac{1}{z(1 - \cos z)}$ の極 $z = 0$ における位数と留数を求めよ．

(電気通信大類 29)　　(固有番号 s291005)

15.6 次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ．

(1) 区間 $x = [-\pi,\ \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a\ :\ x \geq 0\,, & a\text{ は実定数} \\ 0\ :\ x < 0 \end{cases}$

(2) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される三角関数 $y = a\sin(nx)\cos(nx)$　ここで n は整数

(3) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大類 29)　　(固有番号 s291102)

15.7 複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = \sinh 2z$　について，以下の問いに答えよ．ただし，$x,\ y$ は実数とする．なお，$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$，$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ と定義し，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてよい．

(1) $f(z) = u + iv$ とするとき，$u,\ v$ を $x,\ y$ を用いて表せ．ただし，$u,\ v$ は $x,\ y$ の実関数とする．

(2) $f(z) = 0$ となる z を求めよ．

(3) $w = f(z)$ により z 平面上の直線 $x = \dfrac{1}{2}$ を w 平面上に移したとき，w 平面上の図形は楕円になる．w 平面上にその楕円を図示せよ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291302)

15.8 流体の密度を $\rho(x, y, z, t)$，速度を $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ とする．　湧き出しも吸い込みもないとき，連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

が成り立つことを示しなさい．

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292210)

15.9 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ が恒等的に $\nabla\times\boldsymbol{A} = 0$ を満たすとき，始点を $\mathrm{P_1}$，終点を $\mathrm{P_2}$ とする $\boldsymbol{A}$ の線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{P_1}}^{\mathrm{P_2}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ は，$\mathrm{P_1}$ から $\mathrm{P_2}$ への経路によらないことを示しなさい．

(金沢大類 29)　　(固有番号 s292211)

15.10 スカラー関数 $f(x, y, z) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は，それぞれ直角座標系の $x,\ y,\ z$ 方向の単位ベクトルとする．

(1) 点 $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right)$ を含む等位面（関数 f の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の $x,\ y,\ z$ 成分を求めよ．

(2) 関数 f の勾配の発散 $\nabla\cdot\nabla f$ を求めよ．

(3) 関数 f の勾配の回転 $\nabla\times\nabla f$ を計算し，$\overrightarrow{0}$ となることを示せ．

(4) 点 $Q(1, 0, 1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{k}$ の方向への f の方向微分係数を求めよ．

(富山大類 29)　　(固有番号 s292303)

15.11 三次元ユークリッド空間において，点 O を原点とし正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3 (= \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)$ を基底とする座標系 E がある．また，点 P があって，点 O から点 P までの位置は実変数 t に関するベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ で表される．座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を変数 t に関して 2 階微分すると $\sin(t)\boldsymbol{e}_1 - \cos(t)\boldsymbol{e}_2$ となった．なお，$t = 0$ のとき，座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ の変数 t に関する 1 階微分の値は $-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3$ であり，また，$t = 0$ のとき $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(0)$ の値は $\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ である．　このとき，以下の設問に答えよ．

(1) ベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を求めよ．

(2) 正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{b}_1 = \cos(t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(t)\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}_2 = -\sin(t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(t)\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_3$ がある．また，ある点 Q があって，点 P から点 Q までの位置を表すベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t)$ は $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t) = 5t\boldsymbol{b}_1 + 7t\boldsymbol{b}_2$ である．

(a) 座標系 E を用いて表したベクトル $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ について， 変数 t に関する 2 階微分をそれぞれ求めよ．得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ.

(b) 点 O から点 Q までの位置を表すベクトル関数を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ とおく． 座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ の変数 t に関する 2 階微分を求めよ． 得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ.

(名古屋大類 29)　　(固有番号 s292806)

15.12 z を複素数とするとき，方程式 $z^4 = -1$ のすべての解を求めなさい.

(三重大類 29)　　(固有番号 s293105)

15.13 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．以下の量を計算せよ.

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla \dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$

(4) $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ (ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

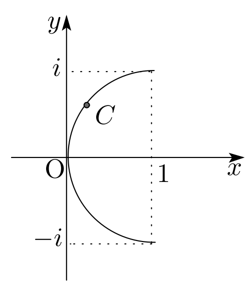
(奈良女子大類 29)　　(固有番号 s293207)

15.14 複素数 $z = x + iy$, $w = u + iv$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y, u, v は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする.

(1) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{e^{2\pi z} - 1}{z - i}$

(2) 複素関数 $w = f(z) = \dfrac{z - 1}{z - i}$ により，z 平面上の図形 $|z - 1| < \sqrt{2}$ は，w 平面上でどのような図形に写されるかを図示せよ.

(3) 右図に示す通り，$z = 1$ を中心とする単位円の左半分に沿った $z = 1 - i$ から $z = 1 + i$ に至るまでの曲線を経路 C とするとき，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 - 2z - 3} dz$ を求めよ.



(大阪大類 29)　　(固有番号 s293504)

15.15 (1) z を複素数とする．複素平面上において，原点を中心として半径 a の円 L を積分路とするとき，

$$\int_L \frac{dz}{z}$$

を計算せよ.

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{4 - \sin\theta} d\theta$$

(大阪府立大類 29)　　(固有番号 s293603)

15.16 (1) $f(x) = \begin{cases} 1\,, & (0 \leq x \leq 1) \\ 0\,, & (\text{上記以外}) \end{cases}$ とする．以下の設問に答えよ.

(a) $f(x)$ 自身の畳み込み積分 $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) f(y) dy$ を求めよ.

(b) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ.

(c) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(u)$ が $F(u)^2$ で与えられることを示せ.

(2) $f(x)$ が $f(x) = x$, $(-\pi \leq x \leq \pi)$ で与えられる周期関数とする. ここで周期 T は 2π である. $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ によりフーリエ級数展開し, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$ であることを示せ. なお, i は虚数単位を表す. また, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ である.

(九州大類 29)　　(固有番号 s294708)

15.17 次の各問に答えよ. ただし, i は虚数単位とする.

(1) 絶対値 2, 偏角 $\dfrac{5}{3}\pi$ の複素数を, $x + yi$ $(x,\ y$ は実数) の形で表し, 複素数平面上に図示せよ.

(2) 複素数 z についての方程式 $z^3 = -i$ のすべての解を, $x + yi$ $(x,\ y$ は実数) の形で求めよ.

(宮崎大類 29)　　(固有番号 s295301)

15.18 $\displaystyle\int_0^T e^{i\frac{2\pi mt}{T}} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\ dt$ を計算しなさい.

ただし, i は虚数単位, m と n は正の整数, T は正の実数とする.

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295504)

15.19 直交座標系において, スカラー関数 $f = yz^2$ とベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z) = (-y,\ x,\ 1)$ が与えられているとき, 以下の問いに答えよ.

(1) rot $\boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{A})$ を求めよ.

(3) 4 点 $P(1,1,0),\ Q(-1,1,0),\ R(-1,-1,0),\ S(1,-1,0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って $P \to Q \to R \to S \to P$ の順に一周する線積分 $\displaystyle\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ. ただし, $d\boldsymbol{r}$ は線積分における微小線素ベクトルを表す.

(室蘭工業大類 29)　　(固有番号 s295509)

15.20 次の (1), (2) に答えなさい. ただし, x を実数, z を複素数とする. また, i は虚数単位, e は自然対数の基底である.

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$ の $z = 0$ の周りでのテイラー展開を求めなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}$ を, $z = e^{ix}$ として $|z| = 1$ の閉路積分から求めなさい.

(和歌山大類 29)　　(固有番号 s296508)

15.21 関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する. ただし, i は虚数単位, e は自然対数の基底である.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$$

また, 2 つの関数 $g(x),\ h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する.

$$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1\,, & \left(x \leq \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \\ 0\,, & \left(x > \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \end{cases}$$

(2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする. 関数 $f_2(x)$ を求め, その概略図を描きなさい.

(3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい.

(和歌山大類 29)　　(固有番号 s296509)

確率統計

16 確率統計

16.1 ある道路で歩行者の歩行速度の調査を行ったところ, 以下の表のような結果となった. 調査対象者全体の, 歩行速度の平均値 $\overline{z}$ および不偏分散 $\hat{\sigma}_z{}^2$ を求めよ.

	調査した人数	歩行速度の平均値	不偏分散
60 歳未満	9 人	$\overline{x} = 1.8 \quad (m/s)$	$\hat{\sigma}_x{}^2 = 0.2 \quad (m/s)^2$
60 歳以上	18 人	$\overline{y} = 0.8 \quad (m/s)$	$\hat{\sigma}_y{}^2 = 0.1 \quad (m/s)^2$
調査対象者全体	27 人	$\overline{z} \quad (m/s)$	$\hat{\sigma}_z{}^2 \quad (m/s)^2$

(お茶の水女子大類 29)　　(固有番号 s290612)

16.2 確率変数 X の累積分布関数 $F(x)$ が以下の微分方程式で表されるとする.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{F(1-F)}{s}$$

今, $F(m) = 1/2$ である. ただし, m, s は実数である. このとき, 設問 (1)〜(5) について答えよ.

(1) 累積分布関数 F, および F の密度関数 f をそれぞれ求めよ.

(2) f が偶関数となる m を求めよ. ただし, その導出過程, または理由を示すこと.

(3) 期待値 $E = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f dx$ を求めよ. ただし, その導出過程を示すこと.

次に, 入力信号の値 x に応じた確率で信号を出力したりしなかったりするシステムを考える. 今, n 種類の入力信号の値 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して, 信号が出力された頻度を調べたところ $r_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ を得た. 以下の問いに答えよ.

(4) 関数 $\varphi(F(x)) = \log\left(\dfrac{F(x)}{1-F(x)}\right)$ を, x の一次式で表せ.

(5) $y_i = \varphi(r_i)$ としたとき,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - \varphi(F(x_i))\}^2$$

を最小にする m と s を求め, それぞれ下記の統計量を用いて表せ.

平均 : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j\,,\qquad \overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j$

分散 : $\mathrm{var}(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2\,,\qquad \mathrm{var}(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2$

共分散 : $\mathrm{cov}(x, y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \overline{x} \cdot \overline{y}$

(東京大類 29)　　(固有番号 s290702)

16.3 袋の中に 3 色の玉が 8 個入っており，赤玉が 4 個，緑球が 2 個，青球が 2 個である．A さんが袋の中から無作為に玉を 3 個取り出し，5 個の玉が残る袋の中から B さんが無作為に玉を 3 個取り出し，色を確認した後に玉をすべて袋に戻す．この過程を 1 回の試行とし，A さんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときを $X = 1$，それ以外をX=0とし, Bさんが赤, 緑, 青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときをY=1，それ以外を $Y = 0$ とする．この試行を繰り返し行うとき，以下の問いに答えよ．

(1) この試行を 1 回行ったときの，次の統計量を求めよ．

(a) 期待値 $E(X)$ および $E(Y)$．

(b) 相関係数 $\rho(X, Y)$．

(2) A さんは n 回目の試行で初めて $X = 1$ となったときに n 点もらえるとする．

(a) もらえる点数が 3 点である確率を求めよ．

(b) A さんのもらえる点数の期待値は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha \sum_{k=1}^{n} k\beta^{k-1}$ という形で表せる．ただし，α と β は実数とする．α および β の値を求めた後，期待値を求めよ．

(3) B さんは n 回目の試行で初めて $Y = 1$ となったときに r^n 点もらえるとする．ただし，r は正に実数とする．B さんがもらえる点数の期待値が有限な値をとるための，r の条件を求めよ．

(東京大類 30)　　(固有番号 s300702)

16.4 X を非負値離散型確率変数とする．$a > 0$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 I を次のよう定義する，

$$I = \begin{cases} 1 & (X \geq a) \\ 0 & (0 \leq X < a) \end{cases}$$

$Pr(A)$ を事象 A が真である確率を表すことにすると，I の期待値 $E(I)$ と「 $X \geq a$ となる」確率 $Pr(X \geq a)$ は以下の等式 (i) を満たすことを示せ，

$$E(I) = Pr(X \geq a) \tag{i}$$

(2) 等式 (i) を用いて，$E(X)$ と $Pr(X \geq a)$ は以下の不等式 (ii) を満たすことを示せ．

$$Pr(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \tag{ii}$$

(3) 不等式 (ii) を用いて，$Pr(\,|X - E(X)|\, \geq a)$ と X の分散 $V(X)$ は以下の不等式 (iii) を満たすことを示せ．

$$Pr(\,|X - E(X)|\, \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \tag{iii}$$

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291310)

16.5 ある工場の製品 A が大量生産されているとき，製品 A の不良率 θ を推定することを考える．生産現場からランダムに大きさ n の標本を選び，不良品の数を調べる. X を不良品のとき 1，良品のとき 0 となる確率変数とする．このとき, 以下の問いに答えよ．

(1) パラメータ θ が与えられたとき，X が値 x をとる確率 $f(x;\theta)$ を求めよ．

(2) $x_1, \cdots, x_n$ を確率分布 $f(x;\theta)$ をもつ母集団からの無作為標本とするとき，この標本の同時確率を最大にするような θ を $\hat{\theta}$ と書く，$\hat{\theta}$ を求めよ．

(3) $\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量になっていることを示せ．

(筑波大類 29)　　(固有番号 s291311)

16.6 A さんは１から５までの数字が１つずつ記入された５枚のカードを持っている．同様に，B さんも１から５までの数字が１つずつ記入された５枚のカードを持っている．A さんと B さんは，それぞれ自分のカードをでたらめに３枚選ぶ．A さんが選んだ数字の集合を X とし，B さんが選んだ数字の集合を Y とする．下の問いに答えなさい．

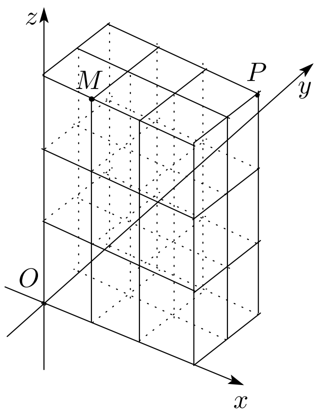
(1) $X = \{1, 2, 3\}$ となる確率 p_1 を求めなさい．

(2) $X = Y$ となる確率 p_2 を求めなさい．

(3) $X \cap Y$ がただ１つの要素からなる確率 p_3 を求めなさい．

(長岡技科大類 29)　　(固有番号 s292103)

16.7 下図のように，空間上に点 $O(0, 0, 0)$ と点 $P(3, 2, 3)$，および点 $M(1, 0, 3)$ がある． ロボット A は点 O から点 P に，ロボット B は点 P から点 O に， それぞれ最短経路（8 ステップ）で移動する． ただし，1 ステップの移動は，x 軸，y 軸，z 軸のいずれか 1 方向に長さ 1 だけの移動とする． 以下の問いに答えよ．



(1) 点 O から点 P に移動する最短経路は何通りあるか答えよ．

(2) 点 O から点 P に，点 M を通って移動する最短経路は何通りあるか答えよ．

(3) ロボット A と B はそれぞれ独立に，すべての可能な最短経路の中から無作為に一つを選択する．選択した経路に沿って，それぞれの出発点からロボット A と B が同時に出発し，同時に 1 ステップずつ移動していくとき，点 M で両者が出会う確率を求め，既約分数で答えよ．

(豊橋技科大類 29)　　(固有番号 s292701)

16.8 箱の中に７本の「はずれ」と３本の「当たり」が入っているくじがあう．以下の設問に答えよ．なお，１回につき，くじは１本引くものとする． また，特に断らない限り，続けてくじを引く場合，一度引いたくじは箱の中に戻すものとする．

(1) このくじを１回引いて，当たりが出る確率を求めよ．

(2) このくじを 3 回引いて，１回も当たりが出ない確率を求めよ．

(3) このくじを 3 回引いて，１回以上当たりが出る確率を求めよ．

(4) このくじを 3 回引いて，１回だけ当たりが出る確率を求めよ．

(5) このくじを 3 回引いて，３回連続で当たりが出る確率を求めよ．

(6) 一度引いたくじを箱の中に戻さないようにする．このとき，くじを 3 回引いて，３回連続で当たりが出る確率を求めよ．

(豊橋技科大類 30)　　(固有番号 s302701)

16.9 赤玉が N 個，白玉が N 個入ったくじ引き機を使い， 各回ごとにどちらの色の玉が出るかを予想する．N は1以上の整数であり，また，くじ引き機を出た玉はくじ引き機に戻さないとする． 予想者はすべての予想をくじ引き開始前に終了しており，$2N$ 回の試行に対して， 最終的に必ず赤白それぞれが N 個ずつになるように予想してあるとする．このとき，予想が i 回当たる確率を P_i とする．以下の設問に答えよ．

(1) $N = 2$ のとき，$i = 0, 1, 2, 3, 4$ の場合の P_i を求めよ．

(2) $N = 3$ のとき，P_i がゼロとなる i の値をすべて求めよ．

(3) $N = 4$ のとき，P_i がゼロとならない場合の P_i をすべて求めよ．

(4) P_i がゼロとならない場合の P_i を求める式を N と i を用いて導け．

(名古屋大類 29)　　(固有番号 s292805)

16.10 3本の「あたり」と17本の「はずれ」を含む20本のくじがある． 続けて2回くじを引く時，(1)〜(4) の問いに答えよ． ただし，1度引いたくじは元に戻さないものとする．

(1) 1回目にくじを引いた時点で，それが「あたり」である確率を求めよ．

(2) 1回目に「あたり」を引き，かつ2回目で「はずれ」を引く確率を求めよ．

(3) 1回目に「はずれ」を引き，かつ2回目で「はずれ」を引く確率を求めよ．

(4) 2回目に引いたくじが「はずれ」であった時，1回目のくじが「あたり」であった確率を求めよ．

(三重大類 29)　　(固有番号 s293114)

16.11 (1) 625 のすべての約数の和を求めよ．一般に，自然数 n の約数には1と n も含まれることに注意せよ．

(2) 25200 の約数の個数を求めよ．

(3) 25200 のすべての約数の和を求めよ．

(4) 25200 の約数のうち一つを無作為に選択した場合，それが 84 の倍数である確率を求めよ．

(京都大類 29)　　(固有番号 s293303)

16.12 表が出る確率が θ のコインを繰り返し投げ，表を1，裏を0として結果を $0110\cdots$ のように順に記録していく． ここで，$0 < \theta < 1$ である． 初めてパターン“ 01 ”が現れるまでの待ち時間を T で表す．例えば $1001\cdots$ ならば $T = 4$，また，$000001\cdots$ ならば $T = 6$ である．以下の問いに答えよ．

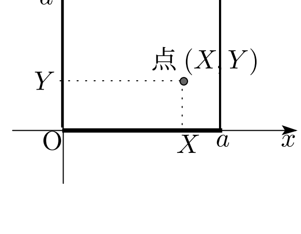
(1) $T = 3$ となる確率 $p(3)$ を θ の多項式で表せ．

(2) $T = 5$ となる確率 $p(5)$ を θ の多項式で表せ．

(3) $T = t \quad (t \geqq 2)$ となる確率 $p(t)$ を求めよ．

(九州大類 29)　　(固有番号 s294707)

16.13 右図の一辺の長さが a の正方形領域 R からランダムに1つの点を選択する試行を考える．選択された点の座標を (X, Y) としたとき，X および Y は連続確率変数と扱うことができ，それらの同時確率密度関数は次式で与えられるものとする，



$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}, & (0 \leq x \leq a,\ \text{かつ},\ 0 \leq y \leq a\ \text{の場合}) \\ 0, & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

ただし，a は正の実数である．領域 R 内であれば，x および y の値に関わらず同時確率密度関数が等しいことから，この試行は領域 R から一様ランダムに点を選択するものである．この試行に関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy$ の値を求めなさい．

(2) 同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ を用いて，$X \leq \dfrac{a}{3}$ となる確率を求めなさい．

(3) $Z = X + Y$ とする．領域 R 内のどの位置の点が選択された場合に $Z \geq a$ となるか，すなわち，$Y \geq -X + a$ となるかを考え，それを基に，$Z \geq a$ となる確率を求めなさい．

(和歌山大類 29)　　(固有番号 s296510)