大学編入学試験問題集（数学）

碓氷軽井沢IC数学教育研究所

2022年3月

目 次

基礎数学

1　基礎数学

1.1　集合 X の部分集合 $A,\ B$ に対し

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

とおく．ここで，$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ である．

(1)　$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ を示せ．

(2)　$A \triangle B = \emptyset$ と $A = B$ は同値であることを示せ．

(3)　$C \subset X$ とする．$A \triangle B = C$ ならば $A = B \triangle C$ を示せ．

(4)　$A_i \subset X \ \ (i = 1, 2, \cdots, k),\ \ B_j \subset X \ \ (j = 1, 2, \cdots, \ell)$ に対し

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \triangle \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} B_j\right) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{\ell} (A_i \triangle B_j)$$

を示せ．

(筑波大 2021)　　(m20211305)

1.2　10 進表記の $m(m \geq 1)$ 桁の自然数 n の各位の数字を $d_i(1 \leq i \leq m,\ 0 \leq d_i \leq 9)$ と表すものとし，$r(n)$ を以下と定義する．

$$r(n) = \sum_{i=1}^{m} d_i$$

このとき，$r(n+3)$ と $r(n)$ の差は 3 の倍数であることを証明せよ．

(山梨大 2021)　　(m20211801)

1.3　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ を求めたい．解法の指針を最初に述べた後に解答せよ．

(鹿児島大 2021)　　(m20215417)

微分積分 I

2　微分

2.1　次の関数 $f(x)$ の $x = 0$ における微分可能性を調べよ (a は定数)．ただし，逆三角関数は主値をとるものとする．

$$f(x) = \begin{cases} a|x| - x\tan^{-1}\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(筑波大 2021)　　(m20211315)

2.2　次の式の値を求めよ．

$$\lim_{x \to +0} xe^{x}$$

(富山大 2021)　　(m20212301)

2.3 次の関数 y を x で微分せよ．

(1) $y = xe^{-x^2}$　　(2) $y = \dfrac{x^x}{(x+1)^{x+1}}$

(福井大 2021)　(m20212401)

2.4 次の関数の 1 階導関数と 2 階導関数を求めよ．なお，n は整数，e は自然対数の底である．

$x^{n-1}e^{1/x}$

(福井大 2021)　(m20212414)

2.5 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log x(5-x)$

(2) $y = \dfrac{4x-1}{e^x}$

(3) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$

(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}+2x}$

(福井大 2021)　(m20212420)

2.6 関数 $f(x) = (x^3+1)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を n 回微分して得られる第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) 極限値

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2}{x^3}$$

が存在するような定数 a_0，a_1，a_2 と，そのときの極限値 A を求めよ．

(名古屋工業大 2021)　(m20212901)

2.7 関数 $f(x) = \sin\left(\mathrm{Cos}^{-1}x\right)$ の増減を調べ，極値を求めよ．ただし，$y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ の値域は $0 \leqq y \leqq \pi$ である．

(名古屋工業大 2022)　(m20222901)

2.8 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2021)　(m20213402)

2.9 x の関数 $f(x) = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ を考える．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ $(x \geqq 0)$ の値域を求めよ．

(京都工芸繊維大 2022)　(m20223402)

2.10 次の関数の第 n 次導関数を求めよ．

$$y = \log(1+x)$$

(広島大 2022)　(m20224101)

2.11 (1) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2x\tan x - \frac{\pi}{2}}{\sin x - \cos x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \log\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする．

(a) 3 階までの導関数 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ を求めよ．

(b) 次の式

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2}{x^2}=0$$

が成り立つように定数 a_0，a_1，a_2 を定めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214601)

2.12 次の関数を微分しなさい．

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^4$　　(2) $y=\left(2x^2+1\right)^2$　　(3) $y=\sqrt{x}$　　(4) $y=3\,e^{-4x}$

(佐賀大 2021)　　(m20214906)

2.13 次の関数の増減，極値，変曲点を調べてグラフを描け．

$$y=\frac{x}{x^2+1}$$

(佐賀大 2021)　　(m20214911)

2.14 次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) 次の極限を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2x^3-7x^2+2x+3}{2x^3-7x^2+7x-2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(2) 次の微分を求めよ．

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　(b) $\tan^2(x)$

(佐賀大 2021)　　(m20214915)

2.15 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x+\infty}\frac{x-\cos x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x$

(佐賀大 2021)　　(m20214920)

2.16 以下の微分を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}\big[\cos(\log ax)\big]$

(鹿児島大 2021)　　(m20215401)

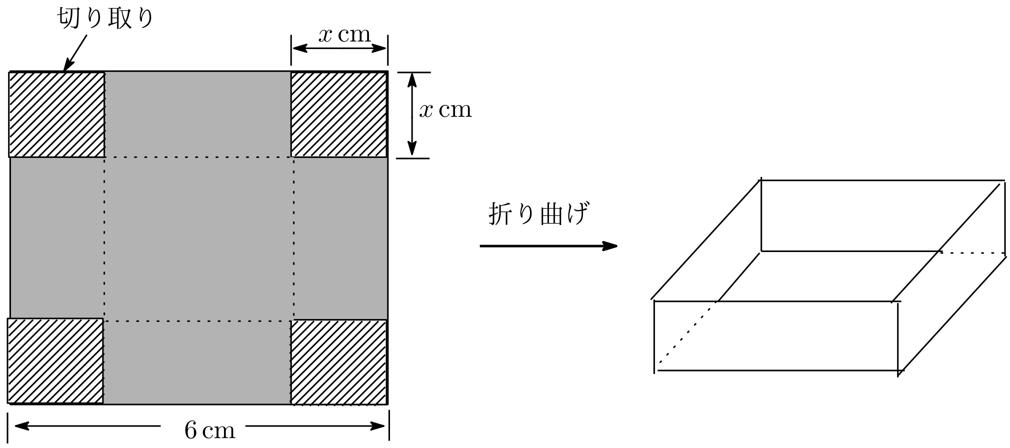
2.17 $\dfrac{d\big(\log(x^2+3)+\sin^2 3x\big)}{dx}$ を求めなさい．ただし，log は自然対数である．

(鹿児島大 2021)　　(m20215406)

2.18 $\sqrt{\cos x}$ の導関数を求めよ．

(鹿児島大 2021)　　(m20215413)

2.19 一辺が 6 cm の正方形の紙の四隅から，一辺の長さ x cm の同じ大きさの 4 つの正方形を切り取り，残りの紙を折り曲げてふたのない直方体の箱を作る．なお，紙の厚みは無視できるものとする．



(1) この箱の容積を $V\,\mathrm{cm}^3$ とすると，V は ① 式で示されることを説明せよ．

$$V = x(6-2x)^2 \qquad ①$$

(2) x の取りうる範囲を述べよ．

(3) ① 式を微分すると ② 式となる．この式を用いて V が最大となる x の値を求める手順を説明せよ．そして，その x の値を求めよ．

$$V' = 12(x-3)(x-1) \qquad ②$$

(鹿児島大 2021)　　(m20215418)

2.20 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\tan^{-1}(3x) - \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．ただし，$\tan^{-1}$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216001)

2.21 次の関数を x で微分しなさい．

(1) $y = \dfrac{1}{2x+5}$　　(2) $y = \sqrt{1-x^2}$

(3) $y = \dfrac{\log_e x}{x^2}$　　(4) $y = \cos(5x-3)$

(東京海洋大 2021)　　(m20216401)

3 積分

3.1 関数 $f(x) = 4x^4 \log_e x$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$x > 0$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を凹凸を含めて作成しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(4) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2021)　　(m20210303)

3.2 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$

(2) $\displaystyle I = \int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}\,dx$ について次に答えよ．

(a) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくとき $\dfrac{dx}{d\theta}$ を求めよ.
(b) (a) を用いて θ で置換積分をして, I を求めよ.

(秋田大 2021)　　(m20210401)

3.3 N を自然数とする. このとき, 次の各問に答えよ;

(1) $y \geq 0$ に対して, 次が成り立つことを示せ.

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める. このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210604)

3.4 $a \neq 0,\ b \neq 0$ のとき, 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{ax}\sin bx\ dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210610)

3.5 (1) 以下の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^\pi \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$$

(2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続であり, $f(x)>0 \ \ (x\in[0,1])$ とする. このとき, 以下の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)f(x)}}\,dx$$

(筑波大 2021)　　(m20211304)

3.6 広義積分 $I=\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2+\sin x}dx$ の収束・発散を調べよ.

(信州大 2021)　　(m20211902)

3.7 $\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおいて, 置換積分法により不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ を求めよ. ただし $a\neq 0$ とする.

(信州大 2022)　　(m20221902)

3.8 関数

$$f(t)=\frac{1}{1+e^{-t}} \ \ (t\in\boldsymbol{R}), \qquad F(x)=\int_0^x f(t)dt \ \ (x\in\boldsymbol{R})$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ および $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} f(t)$ を求めよ.

(2) $y=f(t)$ のグラフの概形を図示せよ.

(3) $y=F(x)$ のグラフは下に凸であることを示せ.

(4) $a>0$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{F(ax)}{x}$ を求めよ.

(金沢大 2021)　　(m20212201)

3.9 定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin|x| - \sin x)dx$$

の値を求めよ.

(金沢大 2021) (m20212202)

3.10 $\boldsymbol{R}$ 上の関数 f は, 任意の有界閉区間において積分可能であり

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \boldsymbol{R})$$

を満たすとする. 次の問いに答えよ.

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy \quad (x \in \boldsymbol{R})$ とするとき, f は

$$f(x) = F(x+1) - F(x) - F(1) \quad (x \in \boldsymbol{R})$$

を満たすことを示せ.

(2) f は微分可能であり, 任意の実数 x に対して, $f'(x) = f(1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 x に対して, $f(x) = f(1)x$ が成り立つことを示せ.

(金沢大 2021) (m20212208)

3.11 次の式で定義される xy 平面上の曲線 y_1 と y_2 および $x = 0$ と $x = 2\pi$ で囲まれる面積を求めよ

$$\begin{cases} y_1 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases}$$

(富山大 2021) (m20212304)

3.12 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$ (2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

ただし, m および n は正の整数とする.

(福井大 2021) (m20212402)

3.13 次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

(福井大 2021) (m20212415)

3.14 非負の実数 θ[rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x = \theta\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ, その概形は図 1 に示す「蚊取り線香」に近い, 図 2 のような渦巻状の曲線となる.

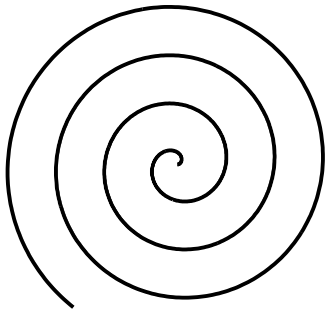


図１：蚊取り線香

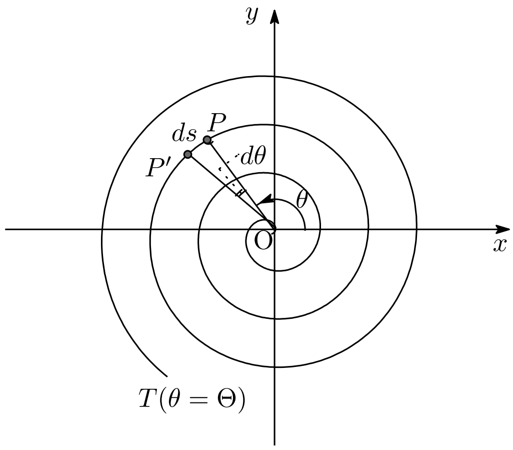


図２：「アルキメデスのらせん」

図２に示すように，曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ，点 P が P' に移動したとする．このときの $P - P'$ 間の微小な長さを ds と表すと，$\dfrac{ds}{d\theta}$ は，

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \tag{2}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1)　式 (1) の x, y に対し，$\dfrac{dx}{d\theta}$，$\dfrac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ．

(2)　式 (2) を利用して，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を θ によって表せ，$\dfrac{ds}{d\theta}$ ではなく $\dfrac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意．

(3)　(2) で求めた θ の関数 $\dfrac{d\theta}{ds}$ について，グラフの概形を描きたい．$\dfrac{d\theta}{ds}$ の θ に関する 1 階導関数を用いて増減を調べ，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を縦軸に，θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ．

(4)　図 2 に示すように，「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し，外側の端点 T に対する θ を $\theta = \Theta$ とおく．このとき，O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ．【ヒント】L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており，そのひとつに $\theta = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある $\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right.$ は双曲正弦関数 $\sinh t$ であるので，双曲線関数を用いてもよい$\left.\right)$．

(福井大 2021)　　(m20212419)

3.15　(1)　次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - 16}{e^x - 4} dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x}} dx$

(2)　次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_6^{10} x(x-6)^2 dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos\theta + 1)^2 d\theta$

(福井大 2021)　　(m20212421)

3.16　次式で表される曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

$$
\begin{gathered}
x = 2(t - \sin t) \\
y = 2(1 - \cos t) \\
\text{ここで，} 0 \leq t \leq 2\pi
\end{gathered}
$$

(福井大 2021) (m20212422)

3.17 次に示す関数 $f(x)$ について，以下の設問に答えよ．

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 10$$

(1) 関数 $f(x)$ の極値をすべて求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(3, 7)$ における接線 $y = g(x)$ と曲線 $y = f(x)$ が囲む領域のうち，領域 $\big\{(x, y) \ \big|\ x \geq 0,\ y \geq 0\big\}$ に含まれる部分の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2021) (m20212704)

3.18 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$ を求めよ．

(名古屋工業大 2022) (m20222902)

3.19 広義積分 $\displaystyle\int_3^\infty \frac{6x - 4}{x^3 - 4x} dx$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2021) (m20213403)

3.20 a を正の実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，任意の正整数 k に対し，

$$\lim_{t \to \infty} t^k e^{-t} = 0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい．

(1) 任意の非負整数 n に対し，ある正の実数 C が存在して，$x \geqq 1$ において

$$x^n e^{-ax^2} \leqq Cx^{-2}$$

が成立することを示せ．さらに，任意の非負整数 n に対し，広義積分

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

が収束することを示せ．

(2) 非負整数 n に対し，

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

とおく．$I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．非負整数 m に対し，$I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ．

(4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．$I_4(a)$ を a を用いて表せ．ただし，

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい．

(広島大 2021) (m20214103)

3.21 次の積分を計算せよ．

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \, \cos nx \, dx$ 　　　ただし，m, n は整数とする．

(広島大 2021) (m20214108)

3.22 次の関数の不定積分を求めよ．ただし，a は定数とする．

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

(広島大 2022)　　(m20224102)

3.23 曲線 $5x^2 + 2xy + y^2 = 4$ の囲む面積を求めなさい．

(山口大 2021)　　(m20214304)

3.24 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sin^2 x)\tan x}dx$　　(b) $\displaystyle\int x^9 e^{-x^{10}} dx$

3.25 次の広義積分が収束するように定数 a を定め，そのときの広義積分の値を求めよ．

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} - \frac{a}{\sqrt{x}} \right) dx$$

(愛媛大 2021)　　(m20214602)

3.26 次の定積分および広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(九州大 2021)　　(m20214707)

3.27 次の不定積分を求めなさい．ただし 積分定数を C としなさい．

(1) $x^3 - 3x + 2$　　(2) $\dfrac{1}{x}$　$(x > 0)$　　(3) e^x　　(4) $\dfrac{1}{1-x}$

(佐賀大 2021)　　(m20214908)

3.28 次の積分をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin 2x e^{-x}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos 2x e^{-x}\, dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^5\, dx$

(佐賀大 2021)　　(m20214912)

3.29 次の積分を求めよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}\, dx$

(佐賀大 2021)　　(m20214916)

3.30 以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log x\, dx$

(鹿児島大 2021)　　(m20215402)

3.31 不定積分 $\displaystyle\int x \sin 2x \cos 2x\, dx$ を求めなさい．

(鹿児島大 2021)　　(m20215407)

3.32 曲線 $y = \left| -x^2 + 2x + 3 \right|$ と直線 $y = 4$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線と直線を 1 つのグラフに描きなさい．

(2) 曲線と直線で囲まれる部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2021)　　(m20215411)

3.33 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$ の定積分を求めよ.

(鹿児島大 2021)　　(m20215414)

3.34 つぎの微分，積分を計算せよ．なお，不定積分では積分定数を省略してよい.

(1) $\dfrac{d(e^{-2x^2})}{dx}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(室蘭工業大 2021)　　(m20215501)

3.35 次の不定積分を求めよ.

$$\int x\cos(4x)dx$$

(室蘭工業大 2021)　　(m20215506)

3.36 次の積分を求めよ.

$$\int \frac{x^4+2x^3+4x^2+8x+2}{x^2+2x}\,dx$$

(香川大 2021)　　(m20215703)

3.37 0 以上の整数 n に対し，C_n，S_n を

$$C_n = \int_0^{\pi} x^n \cos x dx$$

$$S_n = \int_0^{\pi} x^n \sin x dx$$

のように定義するとき，以下の問いに答えよ.

(1) C_0，S_0 を求めよ.

(2) C_n を S_{n-1} を用いて表せ.

(3) S_n を C_{n-1} を用いて表せ.

(4) 前問 (1)〜(3) の答えを用いて S_3 を求めよ.

(東京都立大 2021)　　(m20215904)

3.38 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x} dx$ を求めよ.

(滋賀県立大 2021)　　(m20216003)

3.39 $-1 \leq x \leq 1$ において，$f(x) = x\,\mathrm{Cos}^{-1}x$ とする．ここで，$\mathrm{Cos}^{-1}x$ は逆余弦関数で，$\arccos x$ と書くこともある．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\frac{\pi}{2}x}{x^2}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(はこだて未来大 2021)　　(m20216302)

3.40 次の不定積分，または定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (2\cos^2 x - 1)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x-28}$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)^3\,dx$

(東京海洋大 2021)　　(m20216402)

3.41 次の式で表されるる 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ について次の問いに答えよ．ただし，a は負の定数である．

$$f(x) = x^3 - 5x \qquad\qquad g(x) = -x^2 + a$$

(1) $a = -4$ の時，2 曲線のグラフの概形を描け．

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を微分せよ，

(3) 2 曲線が接する時の接点の x 座標と a の値を求めよ．

(4) 2 曲線が接する時，接点とは別に存在する交点の x 座標を求めよ．

(5) 2 曲線が接する時，この 2 曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216403)

3.42 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-1}dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^5} \frac{\sin(\pi \log x)}{x}dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216408)

微分積分 II

4 級数

4.1 $\mathbb{R}$ の区間 $I = [0, \infty)$ 上の関数 f を

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in I)$$

と定める．I 上の関数の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$(*)$ 　$f_0(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \{f(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 \quad (x \in I,\ n = 0, 1, 2, \cdots)$

と帰納的に定める．以下の問いに答えよ．

(1) f の I における最大値を求めよ．

(2) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$0 \leq f_n(x) \leq f(x)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x)\{1 - f(x)\}^n$$

が成り立つことを示せ．

(4) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は f に I 上で一様収束することを示せ．

(東北大 2021)　　(m20210509)

4.2 関数 $\cosh x$ をマクローリン展開し，0 でない最初の 3 項を求めよ．

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210606)

4.3 $x+2y+z+e^{2z}-1=0$ から定まる陰関数 $z=f(x,y)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ が表す曲面上の点 $(x,y,z)=(-2,1,0)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(3) $f(x,y)$ の原点 $(x,y)=(0,0)$ における 2 変数のテイラー展開を 2 次の項まで求めなさい．

(筑波大 2021)　　(m20211307)

4.4 θ が 0 付近では $\tan\theta \fallingdotseq \theta$ と近似されることがある．この近似が成り立つ理由についてテイラー展開（マクローリン展開）を用いて説明せよ．

(富山大 2021)　　(m20212303)

4.5 $\cosh x$ をマクローリン級数展開せよ．ただし，一般項も示すこと．

(福井大 2021)　　(m20212403)

4.6 関数 $f(x,y)=e^{ax}\cos by$ について，次の問いに答えよ．　ただし，a,b は実数の定数とする．

ア．2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ．

イ．$f(x,y)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222702)

4.7 (1) x, y, z, w を正の実数とする．次の不等式を示せ．

$$\sqrt[4]{xyzw} \leqq \frac{x+y+z+w}{4}$$

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 a, b に対し，二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1=a, \quad b_1=b,$$
$$a_{n+1}=\sqrt[4]{a_n b_n^3} \quad b_{n+1}=\frac{a_n+3b_n}{4} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

により定める．このとき，次の不等式を示せ．

$$a_n \leqq b_n \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ は単調非減少数列であることを示せ．また，(2) の数列 $\{b_n\}$ は単調非増加数列であることを示せ．

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束することを示せ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の極限値と数列 $\{b_n\}$ の極限値は等しいことを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214101)

4.8 非負整数 n に対し，

$$a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める．ただし，$0!=1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) x を実数とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $4|x|<1$ のとき絶対収束し，$4|x|>1$ のとき発散することを示せ．

(2) $4|x|<1$ 満たす実数 x に対し,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

と定める．このとき,

$$(1-4x)f'(x)=2f(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.

(3) $4|x|<1$ 満たす実数 x に対し,

$$\sqrt{1-4x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1$$

が成り立つことを示せ.

(4) 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ.

(広島大 2021)　　(m20214105)

4.9 $\sqrt[20]{e}$ の近似値を小数 3 桁まで求めなさい.

(佐賀大 2021)　　(m20214921)

4.10 次の関数 $f(x)$ のマクローリン展開（x=0 のまわりのテイラー展開）を x^3 の項まで求めなさい.

$$f(x)=e^{2x+1}$$

(和歌山大 20221)　　(m20216502)

5 偏微分

5.1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x-3}{x^4-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to 0}\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

(秋田大 2021)　　(m20210403)

5.2 次の関数 $f(x,y)$ について，以下の問に答えよ．x, y の範囲はそれぞれ $0<x<\pi/2$, $0<y<\pi/2$ とする.

$$f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(x-y)$$

(1) 次の偏導関数を求めよ.

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

(2) 次式を満足する (x,y) の値をすべて求めよ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(東北大 2021)　　(m20210506)

5.3　$\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y)=2x^2+2y^2+xy-2x+2y \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1)　f の極値を求めよ．

(2)　$\mathbb{R}^2$ の閉領域

$$E=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\leq 1\right\}$$

における f の最大値と最小値を求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210511)

5.4　領域 D ： $-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2}{3}\pi,\ -\dfrac{\pi}{3}<y<\dfrac{2}{3}\pi$ で定義される関数

$$f(x,y)=2\sin^2 x-2\sin x\sin y-\sin^2 y$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2)　$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ をみたす点 $(a,b)\in D$ をすべて求めよ．

(3)　$f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211003)

5.5　(1)　$z=f(x,y)$ は xy 平面上で定義された C^2 級関数とする．変数 $u,\ v$ に対して，$x=u+v,\ y=uv$ のとき，以下の等式を示せ．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=(x^2-4y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

(2)　関数 $g(x,\ y)=x^4+y^4-2xy^2$ の xy 平面における極値をすべて求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211303)

5.6　関数 $F(x,y)=xy-x^3+y^2$ について，以下の問に答えよ．

(1)　$F(x,y)=0$ を満たす陰関数 $y=f(x)$ の極値となる点 $(x,f(x))$ をすべて求めよ．また，その点が極大値か極小値かについても理由とともに説明せよ．

(2)　原点において $F(x,y)=0$ を近似する直線をすべて求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211311)

5.7　$\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ を考える．

(a)　点 $(1,-1)$ において，$f(x,y)$ の変化率（方向微分）が最大となる方向，およびその最大値を求めよ．

(b)　$f(x,y)$ の極値を求めよ．

(c)　$x^2+y^2\geq 1$ において，不等式 $0<f(x,y)\leq\dfrac{2}{e}$ が成り立つことを示せ．

(d)　$\mathbb{R}^2$ における $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211316)

5.8 関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ で 2 回連続微分可能（すなわち，2 次までの偏導関数がすべて存在し，かつ連続）で，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たしているとする．このとき，次の小問 (1) および (2) に答えよ．

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$w(x,y) = xu(x,y) - yv(x,y)$ とおく．

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(茨城大 2021)　　(m20211702)

5.9 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ とする．関数 $f(x,y) = 2x - xy^2$ の D における最大値を求めよ．

(信州大 2021)　　(m20211901)

5.10 関数 $f(x,y)$ は

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定義されているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ．

(3) $f_x(x,y)$ を求めよ．また，$f_x(x,y)$ は点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ．

(信州大 2022)　　(m20221901)

5.11 次の式で定義される 2 変数関数の 2 階偏導関数を求めよ．

$$f(x,y) = e^{\frac{2}{x}+3y} \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

(富山大 2021)　　(m20212302)

5.12 次の関数 $u = f(x,y,z)$ の全微分を求めよ．

$$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(福井大 2021)　　(m20212404)

5.13 次の偏微分を計算せよ．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(xy) \qquad \Big(x > 0,\ y > 0\Big)$$

(豊橋技科大 2021)　　(m20212702)

5.14 関数 $f(x,y) = \log(x^2+y^2+1) + \dfrac{2}{3}(x+y)$ の極値を求めよ．

(名古屋工業大 2021)　　(m20212902)

5.15 関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 + 2xy$ の極値を調べよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222903)

5.16 $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=xy(x^2+y-1)$ について，以下の問に答えよ．

(1) $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．
ただし，$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ はそれぞれ x, y に関する $f(x,y)$ の偏導関数を表す．

(2) 領域 $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; y>0\right\}$ における，関数 $f(x,y)$ の極大値および極小値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2021)　　(m20213404)

5.17 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

で定める．ここで，関数 $\theta=\tan^{-1}s$ は，関数

$$s=\tan\theta \quad \left\{-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y)=h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0,\infty)$ を定義域とし，区間 $(0,\infty)$ において 1 回微分可能とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $p(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x,y)$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $q(x,y)=e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x,y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x,y)$ を求めよ．

(3) $g(x,y)$ の定義域において，等式

$$-yg_x(x,y)+xg_y(x,y)-h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}=0$$

が成り立っているとする． ここで，$g_x(x,y)$ は $g(x,y)$ の x についての偏導関数，$g_y(x,y)$ は $g(x,y)$ の y についての偏導関数，$h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す． $h(1)=1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213506)

5.18 次のように $F(x,y)$ を定める．

$$F(x,y)=x^3-3xy+y^2-3y$$

$F(x,y)=0$ で定められる x の陰関数 y について，以下の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=0$ となる x の値とそのときの y の値の組 (x,y) をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた x の各値における $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値を求めよ．

(3) (1) で求めた x の各値において陰関数 y は極大となるか，極小となるか，そのいずれでもないかを答えよ．

(神戸大 2021)　　(m20213805)

5.19 $f(x,y)=e^{2x}(x^2+y^2)$ とする．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ および 2 階偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214603)

5.20 $a \in \mathbb{R},\ r > 0$ とする．点 $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1)$ は円 $C_1 = \left\{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2 + {y_1}^2 = 1 \right\}$ 上を動き，点 $\boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2)$ は円 $C_2 = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_2 - a)^2 + {y_2}^2 = r^2 \right\}$ 上を動くものとする．

2 点 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 間のユークリッド距離に関する極値問題について，以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする．

(1) 関数

$$f(\theta_1, \theta_2) = (r\cos\theta_2 + a - \cos\theta_1)^2 + (r\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2, \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

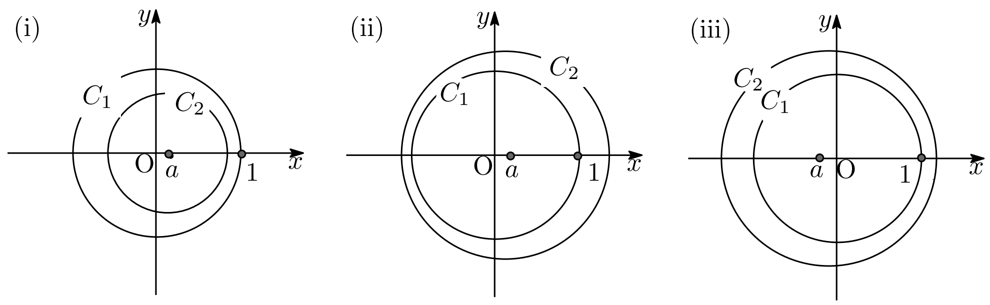
の $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ におけるヘッセ行列

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{\theta_1\theta_1}(0,0) & f_{\theta_1\theta_2}(0,0) \\ f_{\theta_2\theta_1}(0,0) & f_{\theta_2\theta_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

を求めよ．

(2) (1) で求めたヘッセ行列が正定値になるための条件を a と r で表せ．

(3) 図 (i)(ii)(iii) それぞれについて，点 $\boldsymbol{x}_1^* = (1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2^* = (a + r, 0)$ が極値問題の極小解であるかどうか判定せよ．



(九州大 2021)　　(m20214712)

5.21 関数 $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏微分 f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を計算せよ．

(2) ヘッシアン $H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ を計算せよ．

(3) (1) と (2) を用いて，$f(x, y)$ の極値を求めよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214901)

5.22 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ を求めなさい．

$z = 2x^2 - 4xy + y^2 - x$

(佐賀大 2021)　　(m20214907)

5.23 $f(x, y) = \sin^2(x) - \cos(y) \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \pi\right)$ の極値を求めよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214917)

5.24 関数 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214923)

5.25 $f(x, y) = x^2y^3 - 2xy^2 + \dfrac{x}{y}$ の x, y に対する偏導関数をそれぞれ求めよ．

(鹿児島大 2021)　　(m20215415)

5.26 半径 a の球に内接する直円柱のうちで，体積が最大になる直円柱の高さと体積を求めなさい．

(鹿児島大 2021)　　(m20215419)

5.27 $z = e^{x^2}\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$, $x = \sqrt{2}t,\ y = e^{t^2}$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を t を用いて表せ．

(香川大 2021)　　(m20215701)

5.28 $z = 2x^3 + x^2y + 3y^2 + 1$ の $x = 1,\ y = 3$ における接平面の方程式を求めよ．

(香川大 2021)　　(m20215702)

5.29 (1) 関数 $z = e^x \sin xy$ について，偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 関数 $z = f(ax + by)$ について，$b\dfrac{\partial z}{\partial x} = a\dfrac{\partial z}{\partial y}$ であることを証明せよ．　($a,\ b$ は定数)

(3) 関数 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ について，

$$(\triangle u =)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

であることを示せ．ここで，$\triangle$ はラプラシアンである．

(東京都立大 2021)　　(m20215903)

5.30 関数 $f(x, y) = \cos^{-1}\bigl(x^2 + 3y^3\bigr)$ について，$f_x(x, y),\ f_y(x, y)$ を求めよ．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216002)

5.31 円筒形の容器がある．上面と底面に使われている板材の単位面積当たりの重量は，側面に使われている板の 3 倍である．次の問いに答えよ．ただし，容器の半径を r(cm)，高さを h(cm)，重量を W(g)，容積を $V(\mathrm{cm}^3)$，側面に使われている板の単位面積当たりの重量を $w(\mathrm{g/cm}^2)$，円周率を π とする．また，板の厚みは無視できるほど薄い．

(1) W を $r,\ h,\ w$ および π を用いて表せ．

(2) V を $r,\ h,\ \pi$ を用いて表せ．

(3) V を一定として，最も小さい W でこの容器を作った時の r と h の比を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216404)

5.32 関数 $f(x, y) = x^3y - 3x^2y + 2y^3$ の極値を求めよ．必要ならば，$f(0, y)$ の増減を調べよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216409)

5.33 関数 $z = \sin(2x - 3y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を求めなさい．

(和歌山大 20221)　　(m20216503)

6 重積分

6.1 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) f は $(0, 0)$ において連続であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ の閉領域

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dxdy$ の値を求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210510)

6.2 極座標に関する以下の各問に答えよ．

(1) 極座標を用いて $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

(2) 次の広義積分 I について，極座標の考え方を用いることで I^2 を求めよ．また，I を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210607)

6.3 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y \, dxdy$, $\quad D = \left\{(x, y) \,:\, 0 \leqq x \leqq y,\ x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\ \sin(xy)\, dxdy$, $\quad D = \left\{(x, y) \,:\, 1 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ x|y| \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(電気通信大 2021)　　(m20211004)

6.4 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{y^2 - x^2}\, dxdy, \qquad D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq 1\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211306)

6.5 (1) 関数 $g(x) = x^x \ (x > 0)$ について，$\displaystyle\lim_{x \to +0} g(x)$ を計算せよ．

(2) 与えられた領域 D において，(1) の結果を用いて，次の広義 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dxdy\ ,\ \ D = \left\{(x, y) \,:\, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\right\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211312)

6.6 二重積分 $\displaystyle I_n = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^n}\, dxdy \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ は存在するか．存在する場合は，その値を n を用いて表わせ．存在しない場合は，「存在しない」と答えること．

(筑波大 2021)　　(m20211317)

6.7 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ とする．このとき，つぎの小問 (1) および (2) に答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(\sqrt{25 - 6x^2 + 15y^2})^3} dxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2021)　　(m20211703)

6.8 $E = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x + y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle J = \iint_E \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$ を求めよ．

(信州大 2021)　　(m20211903)

6.9 $D_n = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq y\ ,\ \frac{1}{n} \leqq y \leqq 1\right\} \ \ (n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ．

(信州大 2022)　　(m20221903)

6.10 xy 平面において，D を不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$$

で表される領域とする．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ を求めなさい．

(2) $s=x+y,\ t=x-y$ とおくとき，行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212103)

6.11 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ |y| \leq e^{-x^2}, x \geq 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D xy^2dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212203)

6.12 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=x^2+y^2+\sqrt{3}x-3y$$

について，次の問いに答えよ．

(1) f のすべての極値を求めよ．

(2) 閉領域 $D=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 9,\ y \geqq 0\right\}$ における f の最大値と最小値を求めよ．

(3) (2) の D に対して，重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212209)

6.13 次の重積分を計算せよ．ただし，D は $x^2+y^2=2$ と $y=x^2$ で囲まれた領域である．

$$\iint_D ydxdy$$

(福井大 2021)　　(m20212405)

6.14 次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D e^{x+y}dxdy \quad \left(D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\right\}\right)$$

(豊橋技科大 2021)　　(m20212703)

6.15 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2ydxdy$,　　$D=\{(x,y)\ |\ 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,　　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\right\}$

(豊橋技科大 2022)　　(m20222703)

6.16 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 3,\ x + y \geqq 0\right\}$ において，重積分

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2+1} dxdy$$

の値を求めよ．

(名古屋工業大 2021)　　(m20212903)

6.17 xy 平面上で，$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフと y 軸，直線 $y = 1$，直線 $y = 2$ で囲まれる領域を D とする．このとき，次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D (\log y)^2 dxdy$$

(名古屋工業大 2022)　　(m20222904)

6.18 xy 平面上の関数 $f(x, y) = x^3 + 6xy + 3xy^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 重積分

$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

の値を求めよ．ただし，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$ とする．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223403)

6.19 xy 平面上の閉領域 D を

$$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

と定め，

$$z = x^2 - y^2 \qquad ((x, y) \in D)$$

で表される xyz 空間内の曲面を S とする．以下の各問いに答えよ．

(1) S と D で挟まれた部分の体積

$$V = \int_D |x^2 - y^2| dxdy$$

を求めよ．

(2) S の曲面積を求めよ．

(神戸大 2021)　　(m20213806)

6.20 面 $z = x^2 + y^2$ と面 $z = x$ で囲まれた部分の体積を求めよ．

(広島大 2022)　　(m20224103)

6.21 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\right\}$ とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$ を求めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214604)

6.22 $0 < A < B \leq 1$ とするとき，領域 D を $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; A \leq x \leq B,\ x^2 \leq y \leq x\right\}$ とし，

$f(x, y) = \dfrac{y + y^2}{x^2 + y^2}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

ただし，逆正接関数 $\arctan(x)$ が $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい．

(1) 関数 $g(x,y) = y - x\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を y で偏微分した偏導関数を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x,y)dx$ を求めよ．ただし，$x > 0,\ y > 0$ とする.

(3) 関数 $h(x) = 2\ \arctan(x) - 2x + x\log(x^2+1)$ の微分を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy = H(B) - H(A)$ を満たす関数 $H(x)$ を求めよ.

(九州大 2021) (m20214708)

6.23 以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする.

(1) 次の広義積分は収束することを示せ.

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

(2) $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ.

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-x^2 y}\,dxdy$$

(3) $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y\right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ.

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2 y}\,dxdy$$

(九州大 2021) (m20214710)

6.24 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D x^2 dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\}$$

(佐賀大 2021) (m20214902)

6.25 $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 1 \geq x+y,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ.

(佐賀大 2021) (m20214918)

6.26 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 4\right\}$ について $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ として計算せよ.

(佐賀大 2021) (m20214926)

6.27 次の積分について，以下の問に答えなさい.

$$I = \iiint_D \frac{xz}{(y+z)(x+y+z)^4}\,dxdydz$$

$$D\ :\ a \leq x+y+z \leq b,\ 0 \leq x,y,z \quad (0 < a < b)$$

(1) $t = x+y+z,\ u = y+z,\ z = z$ と変換した場合のヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,z)} \qquad \left(= \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)}\right)$$

を求めなさい.

(2) D の範囲の概略を $x,\ y,\ z$ からなる直交座標に $a,\ b$ を用いて図示しなさい.

(3) I を $a,\ b$ を用いて求めなさい.

(熊本大 2021) (m20215202)

6.28 2 変数関数 $f(x,y)=\sqrt{x}\,y^2$ について，次の各問に答えよ．

(1) 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_{xx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2x\right\}$ の値を求めよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215303)

6.29 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D(-x+2y)(2x+2y)\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{\,(x,y)\ \middle|\ 1\le x\le 2,\ 2\le y\le 4\,\right\}$$

(鹿児島大 2021)　　(m20215416)

6.30 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D(x+y)\,dxdy\qquad D\ :\ x+y-2\geqq 0,\ 1\leqq x\leqq 2,\ y\leqq 4$$

(香川大 2021)　　(m20215704)

6.31 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x\leqq 2,\ \sqrt{x}\leqq y\leqq x\right\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_D 2y\log x\,dxdy$ の値を求めよ．

(2) $E=\{(x,y)\mid 0\leqq x+y\leqq 2,\ 0\leqq x-y\leqq 1\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_E(x^2-y^2)\,dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216410)

6.32 座標平面上で直線 $y=x$ と曲線 $y=x^2$ で囲まれる部分を D とする．次の I の値を求めなさい．

$$I=\iint_D(x+2y)\,dx\,dy$$

(和歌山大 20221)　　(m20216504)

7 微分方程式

7.1 微分方程式 $\dfrac{x}{2}\,y'+y=g(x)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $g(x)=0$ のときの一般解を求めなさい．

(2) $g(x)=x^2+\dfrac{1}{4+x}$ のときの一般解を求めなさい．

(3) (2) のときの「$x=-3,\ y=2$」を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2021)　　(m20210304)

7.2 微分方程式

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+a^2u(t)=F(t)$$

について，以下の問いに答えよ．a は 0 でない実数とする．

(1) $F(t)=0$ のとき，一般解を求めよ．

(2) $F(t)=\sin(at)$ のとき，一般解を求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210505)

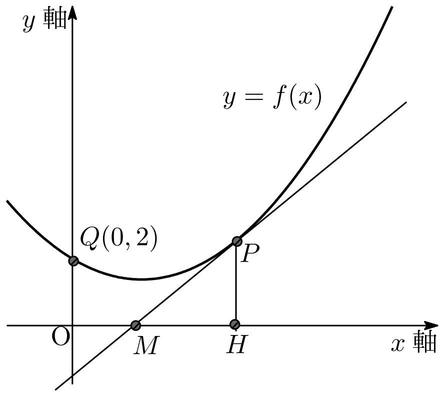
7.3 以下の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}-4y=2x-2$

(2) $xydy-(3x^2+y^2)dx=0$

(お茶の水女子大 2021)　(m20210601)

7.4 ある曲線 $y=f(x)$ 上の点 P における接線と x 軸との交点を点 M，点 P から x 軸に垂直に下した点を点 H とする．線分 MH の長さが一定に値 k となった．点 $Q(0,2)$ を通るこの曲線の式を求めよ．



(お茶の水女子大 2021)　(m20210602)

7.5 次の微分方程式を解け．

(3) $y''+2y'+y=\sin 2x$

(電気通信大 2021)　(m20211005)

7.6 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x^2-1)^2\dfrac{dy}{dx}+2xy(x^2-1)=2$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sin y\cos y}{\cos x}$

(横浜国立大 2021)　(m20211102)

7.7 t の関数 $x(t)$ に対し，初期条件 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=0$ の下で，微分方程式 $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+{\omega_0}^2x=0$ の解を求めなさい．ただし，$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$，$\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ であり，$0<\gamma<\omega_0$ とする．

(金沢大 2021)　(m20212212)

7.8 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+5x=t+e^t$

(2) 次の常微分方程式を解き，初期条件 $t=0$ で $x=x_0$ を満たす特殊解を求めよ.;

$\dfrac{dx}{dt}-x=-2x^2$

(3) 次の方程式で表される曲線族が満たす微分方程式を導け．また，この曲線族の直交曲線を求めよ．(α は曲線族のパラメータ)

$y^2+\alpha x=0$

(富山大 2021)　(m20212305)

7.9 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $3\dfrac{d^2x}{dt^2}+10\dfrac{dx}{dt}+3x=0$　　(1) $3\dfrac{d^2x}{dt^2}+10\dfrac{dx}{dt}+3x=9t+5\cos t$

(福井大 2021)　(m20212411)

7.10 次式は，単振動の運動方程式である．なお，m : 質量，k : バネ定数，x : 変位，t : 時間である．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) $x = e^{\lambda t}$ が運動方程式の解になるための条件を示せ．

(2) 上の結果を利用して x の一般解を示せ．

(3) (2) で得られた解を，三角関数を用いて表せ．

(福井大 2021) (m20212429)

7.11 (1) $x = 0$ のとき $y = 4$ を満たす微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{16}y^2$ の解を求めよ．

(2) xy 平面上で，アで得られた解が表す曲線と，$x = 0$，$x = 4$，$y = 0$ の 3 つの直線で囲まれる領域に含まれる点 (x, y) のうち，x，y が共に自然数となる点の数を求めよ．ただし，境界上の点は含まないものとする．

(豊橋技科大 2022) (m20222705)

7.12 関数 $y = y(x)$ $(x > 0)$ に関する次の微分方程式 $(*)$ を考える．

$$(*) \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x$$

(1) 関数 $z = z(x)$ $(x > 0)$ を $y = xz$ により定める．$(*)$ と同値な，z に関する微分方程式を導け．

(2) $(*)$ の一般解 $y(x)$ $(x > 0)$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2021) (m20213405)

7.13 (1) $x > 0$ における微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = 0$ の一般解を求めよ．

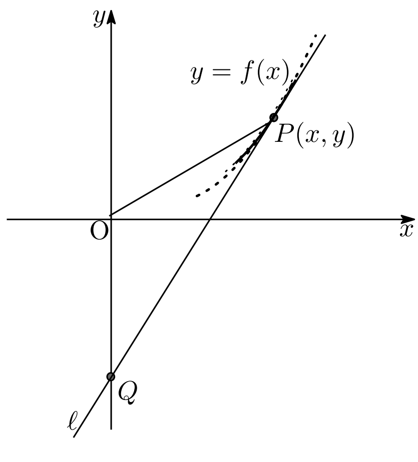
(2) $x > 0$ における微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = e^{2x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

の解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2022) (m20223404)

7.14 xy 平面上の $x > 0$ に微分可能な曲線 $y = f(x)$ がある．
この曲線上の点 $P(x, y)$ における接線 ℓ は右図のように y 軸と交わり，その交点を Q とする．
また，右図の O は原点を表す．



(1) x に関する $f(x)$ の一階微分 $f'(x)$ が $f'(x) > 0$ であり，線分 $\overline{OP}$ と線分 $\overline{OQ}$ が同じ長さであるとして，x と y の関係を微分方程式で表せ．

(2) $u = \dfrac{y}{x}$ とおくことにより (1) の微分方程式を解いて，曲線 $y = f(x)$ を求めよ．
ただし，曲線は点 $(2, 0)$ を通るものとする．

(大阪大 2021) (m20213503)

7.15 (1) 微分方程式 $y' = -y - 1$, $y(0) = 0$ の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 次の漸化式

$$y_{k+1} = (1-h)y_k - h \qquad (k \geq 0) \qquad y_0 = 0$$

で決まる数列 y_k の一般項を求めよ．ここで h は 0 でない定数とする．

(3) x, n を正整数，$h = 1/n$ とおくとき，

$$y_{xn} \to y(x)\ , \qquad n \to +\infty$$

を示せ．

(神戸大 2021)　　(m20213804)

7.16 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \cot y$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 15y = 0$

(広島大 2021)　　(m20214107)

7.17 次の微分方程式を解け．

$$3\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 9 = 0$$

(広島大 2022)　　(m20224104)

7.18 次の初期値問題について解答しなさい．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$

(2) 次の式を満足する上記 (1) で求めた一般解の特殊解を求めなさい．

$y(0) = 4$

(山口大 2021)　　(m20214301)

7.19 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 2y' + 5y = \sin 2x$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$\left(\frac{y'}{y^3}\right)' - \frac{4y'}{y^3} - \frac{2}{y^2} = 0$$

(九州大 2021)　　(m20214702)

7.20 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 20y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 2$

(佐賀大 2021)　　(m20214903)

7.21 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x+2}$$

(佐賀大 2021)　　(m20214909)

7.22 ある反応の反応速度が反応物 A の濃度 $[A]$ に比例した．比例定数の絶対値が k で表されるとして，以下の問いに答えなさい．

(1) 時間を t として，$[A]$ の時間変化を表す微分方程式を答えなさい．

(2) $[A]$ の一般解を答えなさい．

(3) 初期条件 $t=0$ のとき $[A]=C_0$ として，$[A]$ の特殊解を答えなさい．

(4) $[A]=(1/2)C_0$ となる時間 $t_{1/2}$ を答えなさい．

(佐賀大 2021)　　(m20214910)

7.23 (1) 次の微分方程式を解け．

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)y$$

ただし，$t=0$ のとき $y=y_0$ とする．

(2) $y_0 = 0.5$ の場合において，t が -10 から 10 まで変化すると時の y の変化の概略をグラフにせよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214914)

7.24 以下の微分方程式の一般項を求めなさい．

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2+y^2}$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 2e^{2x}$

(佐賀大 2021)　　(m20214927)

7.25 $\dfrac{dy}{dx} = y(1+x)$ の一般解を求めよ．

(熊本大 2021)　　(m20215203)

7.26 次の微分方程式の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

(宮崎大 2021)　　(m20215301)

7.27 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 1$　（ただし，$x>0$）　　(2) $(x+\sin y)dx + x\cos y dy = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2$

(鹿児島大 2021)　　(m20215403)

7.28 放物線 : $y=x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器を水で満杯にする．この容器の底に排水口があり，時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する．時刻 t において容器に残っている水の深さを h，体積を V とする．V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 水の深さ h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表しなさい．

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めなさい．

(鹿児島大 2021)　　(m20215422)

7.29 つぎの微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-3y=0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-3y=5e^{2x}$ (3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-3y=8e^{x}$

(室蘭工業大 2021) (m20215502)

7.30 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y''-3y'-4y=\cos x$$

ただし，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ の意味である．

(室蘭工業大 2021) (m20215507)

7.31 実数 y は，実数 x の関数であり，その関係は式 (I) と (Ⅱ) で表される．以下の問いに答えよ．

$$y=xp-e^p \qquad \text{(I)}$$

$$p=\frac{dy}{dx} \qquad \text{(Ⅱ)}$$

(1) 式 (I) を x で微分して p, p', x の関係を求めよ．ただし，$p'=\dfrac{dp}{dx}$ である．

(2) 前問 (1) で得られた関係を p と p' について解け．解答は x を含んでもよい．

(3) 前問 (2) で得られた関係を利用して y を x で表せ．

(東京都立大 2021) (m20215905)

7.32 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=4y$ の一般解を求めなさい．

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-9y$ を，次の初期条件のもとで解きなさい．

$$x=0 \text{ のとき } y=2,\ \frac{dy}{dx}=1$$

(和歌山大 20221) (m20216505)

線形代数

8 ベクトル

8.1 3 次元空間にある次の 2 つの平面について，以下の設問に答えなさい．

平面 1 : $x+y+\sqrt{2}z=0$

平面 2 : $x+y=0$

(1) 平面 1 の法線ベクトルと平面 2 の法線ベクトルをひとつずつ求めなさい．

(2) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルのなす角を求めなさい．ただし，答えは 0 以上 π 以下とすること．

(3) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルの両方と直交するベクトルのうち，大きさが 1 であるものをひとつ求めなさい．

(北海道大 2021) (m20210101)

8.2 (1) 点 $A(-3,2,6)$，点 $B(5,2,0)$ を直径の両端とする球面 C の方程式を求めなさい．

(2) 球面 C と yz 平面の交わりは円になる．この円の中心座標と半径を求めなさい．

(3) 球面 C と x 軸の交点は 2 点存在する．この交点間の距離を求めなさい．

(岩手大 2021)　　(m20210301)

8.3 点 O を原点とする xyz 空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とする．また，点 A，点 B を直径の両端とする球面を S とする．以下の問に答えよ．

(1) 線分 AB 上に点 P があり，点 A と点 P の間の距離を s とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ．

(2) 球面 S 上の点 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，球面 S の方程式を示せ．

(3) $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$，$\boldsymbol{b} = (0, 2, 1)$ のとき，点 $D(0, 0, d)$ を通り球面 S と接する直線を ℓ とする．ただし，d は $d > 1$ を満たす実数である．

(a) 直線 ℓ と xy 平面の交点を T とする．点 T の座標を $(p, q, 0)$ と表すとき，p および q が満たす方程式を求めよ．

(b) 点 T の軌跡が閉曲線となる d の範囲を示し，その閉曲線によって囲まれた xy 平面上の領域の面積を求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210504)

8.4 点 O を原点とする座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(2, 1, 3)$，$\mathrm{B}(1, 1, 2)$，$\mathrm{C}(3, 0, 1)$，$\mathrm{D}(2, -1, 2)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 A, B, C を通る平面 H の方程式を求めよ．

(2) 平面 H と点 D の距離 d を求めよ．

(3) 外積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(4) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(5) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211001)

8.5 次の問いに答えよ．

(1) 正の数 A, B および実数 α に対して，$\boldsymbol{R}^2$ 内の集合

$$\left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; A(x-\alpha)^2 + By^2 \leqq 1\right\}$$

で表される図形の面積を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ 内の集合

$$E = \left\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + 4y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

と平面 $H = \left\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + z = 1\right\}$ の共通部分 $H \cap E$ で表される図形の面積 S を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212210)

8.6 以下のベクトルがそれぞれ直交するときの実数 x を求めよ．また，そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　　(m20212408)

8.7 以下のベクトル $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ を考え．$\boldsymbol{h} = x\boldsymbol{f} + y\boldsymbol{g}$ を成立させる実数 x と y が存在するか否かを調べることにより，$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ が一次独立か一次従属かを判定せよ．

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　　(m20212418)

8.8 一辺の長さが 3 の正四面体 $ABCD$ において，辺 BC の中点を M とする．

さらに辺 CD 上で $CN = 2ND$ を満たす点を N とする，

(1) 線分 AM, AN, MN の長さを求めなさい．

(2) $\angle MAN = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(3) $\triangle AMN$ の面積を求めなさい．

(山口大 2021)　　(m20214303)

8.9 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の長さを求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ とベクトル $\boldsymbol{a}_2$ の内積を求めよ．

(3) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立なベクトルか 1 次従属なベクトルかを示せ．

(佐賀大 2021)　　(m20214904)

8.10 平行六面体 $ABCD-EFGH$ の体積を v とし，また，この六面体の各面の対角線の交点を $PQRSTU$ とし，平行六面体 $APQR-STGU$ の体積を v' とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \mathbf{c}$ を用いて v を表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \mathbf{c}$ を用いて v' を表しなさい．

(3) v を用いて v' を表しなさい．

(佐賀大 2021)　　(m20214924)

8.11 3 点 $(1,2,3)$, $(1,-1,2)$, $(2,3,1)$ を通る平面の方程式を求めよ．

(熊本大 2021)　　(m20215204)

8.12 点 $O(0,0,0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(0,1,0)$, 点 $B(1,0,2)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 A と B 点を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ．

(3) 点 O から直線 ℓ に下ろした垂線の長さ d を求めよ．

(鹿児島大 2021)　　(m20215404)

8.13 以下の問いに答えなさい．

(1) 平面 P の方程式を $x+y+\alpha z+1=0$, 平面 Q の方程式を $x+\alpha y+z-1=0$ とする．平面 P と Q のなす角が直角となるような α の値を求めなさい．

(2) ベクトル $\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}0\\1\\\beta\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}=\begin{pmatrix}1\\\beta\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ が線形従属となるような実数 β の値をすべて求めなさい．

(鹿児島大 2021)　　(m20215408)

8.14 (1) 空間内の 3 点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,2)$ を通る平面の方程式を求めなさい．ただし，ここでの座標系は直交座標系とする．

(2) 原点から平面までの最短距離を求めなさい．

(鹿児島大 2021)　　(m20215421)

8.15 ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}4\\7\\3\end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\5\\3\end{bmatrix}$ の線形結合（1 次結合）で表せ．

(香川大 2021)　　(m20215705)

8.16 次に示す $\boldsymbol{R}^3$ の基底をグラム・シュミットの正規直交化法（シュミットの正規直交化法）を用いて正規直交化せよ．

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$$

(香川大 2021)　　(m20215706)

8.17 3 次元空間内に原点 $O(0,0,0)$ および

3 点 $A(0,\ 2+2\sqrt{3},\ 0)$,　$B(2-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3}-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3})$,　$C(2+2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ がある．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(3) 四面体 $OABC$ において，三角形 ABC を底面としたときの高さを求めよ．

(東京都立大 2021)　　(m20215902)

9 行列

9.1 次の行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求めよ．

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

(東北大 2021)　　(m20210502)

9.2 正方行列を $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ とおく．

また，n を自然数とする．下の問いに答えなさい．

(1) $B^2,\ B^3$ を求めなさい.

(2) $AB,\ BA$ を求めなさい.

(3) A^n を n を用いて表しなさい,

(4) $n \geqq 2$ に対して, C^n を n を用いて表しなさい.

(長岡技科大 2021)　　(m20212101)

9.3　次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　　(5) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

(福井大 2021)　　(m20212423)

9.4　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$ とし, t が転置を表すとき, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ が成り立つことを示せ.

(福井大 2021)　　(m20212424)

9.5　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(福井大 2021)　　(m20212428)

9.6　次の行列を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$　　ただし, n は自然数とする.

(広島大 2021)　　(m20214109)

9.7　次の行列の積を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(愛媛大 2021)　　(m20214605)

9.8　2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ について以下を答えよ.

(1) A が正則であるための条件を示せ.

(2) またそのときの逆行列を求めよ.

(室蘭工業大 2021)　　(m20215505)

10　行列式

10.1　次の行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(東北大 2021)　　(m20210501)

10.2　$n \times n$ 行列 A を

$$\begin{bmatrix} b & \dots & \dots & b & a \\ \vdots & & \iddots & a & b \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ b & a & \iddots & & \vdots \\ a & b & \dots & \dots & b \end{bmatrix}$$

とおく．但し，n は 2 以上の整数，a, b は実数で，$a \neq 0$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1)　行列 A の行列式の値を a, b および n を用いて表せ．

(2)　行列 A の行列式の値が 0 となるようなすべての b に対して，b を a と n を用いて表せ．

(3)　(2) で求めたそれぞれの b に対応する行列 A の階数を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211309)

10.3　t は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ について，

$A^2B^3A^{-1}$ の行列式の値が 128 であるとき，t の値を求めよ．

(信州大 2022)　　(m20221904)

10.4　α を実数とする．2 以上の自然数 n に対して，n 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

により定める．ここで，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$，$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ である．

また，$a_n = \det(A_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　a_2, a_3 を求めよ．

(2)　a_n を求めよ．

(3)　$\alpha \geq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212204)

10.5 行列

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の逆行列 A^{-1} の行列式を求めよ．

(名古屋工業大 2021)　　(m20212904)

10.6 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) 行列 A が逆行列を持たないような a の値をすべて求めよ．

(2) 行列式 $|AB|$ を計算せよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222905)

10.7 $A = (a_{ij})$ を 3 次正方行列とする．A は $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ を 1 つずつ成分としてもち，

- 各 $i = 1, 2, 3$ について　$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \lambda$
- 各 $j = 1, 2, 3$ について　$a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = \lambda$
- $a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = \lambda$

を満たす自然数 λ が存在すると仮定する．このとき，A は 3 次の魔方陣と呼ばれる．以下の各問に答えよ．

(1) $\lambda = 15$ を示せ．

(2) $a_{22} = 5$ を示せ．

(3) $1 + x + y = 15$，$1 < x < y \leqq 9$ となる自然数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ．

(4) $\det A$ の絶対値を求めよ．またこの値の一意性を示せ．

(神戸大 2021)　　(m20213808)

10.8 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(愛媛大 2021)　　(m20214606)

10.9 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) を xy 平面上の相異なる 3 点とする．また，$|M|$ は正方行列 M の行列式を表すこととする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．3 点 (X_1, Y_1)，(X_2, Y_2)，(X_3, Y_3) が同一直線上に存在するとき $|A| = 0$ となることを示せ.

(2) 変数 x, y に対して，正方行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ {X_1}^2 + {Y_1}^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ {X_2}^2 + {Y_2}^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ {X_3}^2 + {Y_3}^2 & X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．さらに，$\triangle_{i,j}$ を B の (i, j)-小行列式，つまり，B の第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる 3×3 行列の行列式とする．B の第 1 行に関する余因子展開ににより，小行列式を用いて B の行列式を表せ.

(3) 前問の行列 B が $|B| = 0$ を満たすとき，変数 x, y が満たす方程式を xy 平面上に図示せよ.

(九州大 2021)　　(m20214706)

10.10 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & a \\ -1 & a & 1 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$ の行列式が 4 となるときの a の値を求めなさい.

(鹿児島大 2021)　　(m20215409)

10.11 (1) 次の行列の計算を求めよ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列の余因子行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(4) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2021)　　(m20215412)

10.12 $\begin{vmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$ を満たす実数 a をすべて求めよ.

(東京海洋大 2021)　　(m20216405)

11　連立方程式

11.1　実数 x と y に対する連立方程式 $2x-3y=0,\ ax+6y=0$ について，以下の問いに答えよ．，

(1)　この連立方程式を 2×2 行列 A と 2 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いて $A\boldsymbol{u}=0$ の形に表せ．また，その結果を使い，連立方程式が $x=y=0$ 以外の解を持つように実数 a の値を定めよ（逆行列 A^{-1} が存在すればどのような解が得られるか考えるとよい）．

(2)　上で求めた a の値を a_0 とする．$2x-3y=0$ と $ax+6y=0$ の図形的意味（それらが xy 平面上で表す図形はどのようなものか）に基づき，$a=a_0$ のときに連立方程式が $x=y=0$ 以外の解を持つ理由を説明せよ．

(福井大 2021)　　(m20212417)

11.2　次の連立方程式について以下の問に答えよ．

$$
\begin{aligned}
x-3y+3z=0 \quad &\cdots \quad ① \\
2x+y-z=0 \quad &\cdots \quad ②
\end{aligned}
$$

(1)　上式を行列とベクトルを使って表現しなさい．

(2)　はきだし法などを用いて解きなさい．

(3)　(2) で求めた解の概形を図示しなさい．

(福井大 2021)　　(m20212427)

11.3　a,b を実数とする．x,y,z に関する連立 1 次方程式

$$
(*)\begin{cases} ax+ay+2bz=3 \\ 2x+3y+3z=4 \\ 3x+5y+2z=5 \end{cases}
$$

を考える．$(x,y,z)=(-4,3,1)$ は $(*)$ の解であり，かつ $(*)$ はそれ以外の解ももつとする．このとき，a,b の値を求めよ．また，$(*)$ の解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223401)

11.4　連立一次方程式 $\begin{cases} 2x-y+8z=11 \\ x-y+5z=6 \\ -3x+5y-16z=-17 \end{cases}$ を解きなさい．

(佐賀大 2021)　　(m20214922)

11.5　以下の問に答えなさい．ただし，a,b,c,d は定数とし，かつ，a,b,c は相異なるものとする．なお，結果は因数分解した形で示しなさい．

(1)　次の行列式を計算しなさい．

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}
$$

(2)　次の連立一次方程式を解きなさい．

$$
\begin{aligned}
&x+y+z=1 \\
&ax+by+cz=d \\
&a^2x+b^2y+c^2z=d^2
\end{aligned}
$$

(熊本大 2021)　　(m20215201)

11.6 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ は正則行列であることを示し，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) $\overrightarrow{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とする．

$\overrightarrow{b} = \sum_{j=1}^{3} w_j \overrightarrow{a}_j$ と定めたとき，$w_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$ となるための必要十分条件を x, y, z を用いて表せ．

(東京都立大 2021) (m20215901)

11.7 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y + z + w = 1 \\ 2x - y + z + w = 2 \\ 3x - y + 2z + w = 5 \\ 4x - 2y + 3z + 2w = 6 \end{cases}$$

を解け．

(東京海洋大 2021) (m20216406)

12 線形変換

12.1 2 次方程式 $4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ の解を α, β とする．このとき，以下の問いに答えよ．

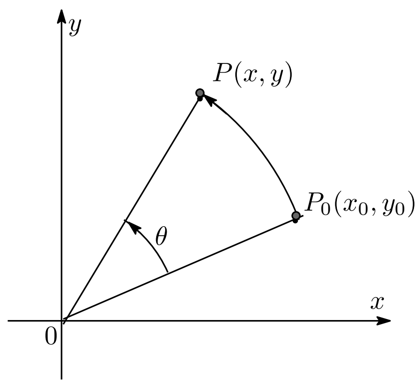
(1) 和 $\alpha + \beta$，積 $\alpha\beta$ を求め，$\alpha^2 + \beta^2$ の値を答えよ．

(2) $|\,\alpha - \beta\,|$ および $|\,\alpha^4 - \beta^4\,|$ の値を求めよ．

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \beta^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を移したときの関数を求めよ．

(秋田大 2021) (m20210402)

12.2 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

12.3 次に示す行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

による一次変換を考える．次の楕円 C

$$C \,:\, \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

が A による一次変換によって写った先の図形の方程式を求めよ．またその概形を $-4 < x < 4$ の範囲で図示せよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214913)

12.4 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

(2) 1 次変換 f による，正方形 $\left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 2\right\}$ の像を座標平面上に図示せよ．

(3) 1 次変換 f による，直線 $x + y = 3$ の像を座標平面上に図示せよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215302)

12.5 2 次元直交座標系における任意の点 $P(x,y)$ の座標を変換する行列について，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P を x 軸に対称な座標に変換する行列 A を示せ．

(2) 点 P を，原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させる行列 B を示せ．

(3) 点 P を直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に対して対称な座標に変換する行列 C を求めよ．

(室蘭工業大 2021)　　(m20215503)

13　固有値とその応用

13.1 次の行列 A について，以下の設問に答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 行列 $2A$ の行列式と固有値を求めなさい.

(北海道大 2021)　　(m20210102)

13.2 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 39 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A のランク（階数）$\mathrm{rank}(A)$ が 3 であることを示しなさい.

(2) $AB = C$ であるとき，行列を用いて x, y, z の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2021)　　(m20210302)

13.3 行列 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 等式 $\boldsymbol{Bx} = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たすとき，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固有値 λ を求めよ.

(2) (1) が成立するとき，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}$ は，微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{By}$$

の解であることを示せ.

(3) t $(0 \leq t \leq +\infty)$ を時間とすると，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ の終端はどのような軌跡となるか，答えよ.

(秋田大 2021)　　(m20210404)

13.4 次の行列 $\boldsymbol{C}$ について，以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) すべての固有値と固有ベクトルを求めよ.

(b) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}$ が対角行列となるような正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列を示す.

(c) n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{C}^n$ を表せ.

(東北大 2021)　　(m20210503)

13.5 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ を 3 次正方行列とする．以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ．さらに，求めた固有値それぞれに対して固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(3) n を 2 以上の整数とする．A^n を求めよ.

(4) 次の式で定義される数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項 a_n を求めよ.

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大 2021)　　(m20210508)

13.6 $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 5 \\ -6 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ の三つの行列に対し，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{rank}(A)$, $\mathrm{rank}(B)$, $\mathrm{rank}(C)$ を求めよ．

(2) A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} が存在するならばそれを求め，存在しないならばその理由を示せ．

(3) B^n を求めよ．

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210608)

13.7 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) I を 3 次単位行列とするとき，行列 $(A-2I)(A-3I)$ を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) A の m 乗 A^m（m は非負整数）を

$$A^m = \lambda_1^m P_1 + \lambda_2^m P_2$$

という形に表せ．ここで，P_1, P_2 は 3 次正方行列であり，P_1, P_2 の各成分，および λ_1, λ_2 は，m に依存しない定数である．

(電気通信大 2021)　　(m20211002)

13.8 次の行列 A および B に関して以下の問いに答えよ．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 & -a \end{bmatrix}$$

ただし，a は実数の定数であり，$A^{-1} = A^T$ が成り立つものとする．なお，任意の実数行列 X の逆行列を X^{-1} と表し，転置行列を X^T と表す．

(1) a を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) BB^T を求めよ．

(4) B の逆行列 B^{-1} を求めよ．

(横浜国立大 2021)　　(m20211101)

13.9 未知数 a, b を含む次の行列 A に関して設問 (1)-(3) に答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A による一次変換で直線 $2x+3y=1$ が直線 $x+4y=3$ に写るとき，a, b の値を求めなさい．

(2) (1) の条件を満たす行列 A のすべての固有値と，各固有値に対応する長さが 1 の固有ベクトルを 1 つ求めなさい．

(3) (1) の条件を満たす行列 A による一次変換で円 $x^2+y^2=1$ を写した図形の方程式を求めなさい．

(筑波大 2021)　　(m20211308)

13.10 3 次行列

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$$

を考える．なお，以下で I は 3 次の単位行列とする．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，各固有ベクトルは，その成分が簡単な整数となるようにすること．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように，正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を定めよ．なお，P はその要素が簡単な整数となるようにすること．

(3) 行列 A^3 を

$$A^3=xA^2+yA+zI$$

のように A^2, A, I の線形結合で表したときの線形結合係数 x,y,z を定めよ．

（設問 (2) で求めた行列 P,P^{-1} を用いると $P^{-1}A^3P$ や $P^{-1}A^2P$ も対角行列となること，および，A の固有値はどれも A の固有方程式を満たすことを利用するとよい．）

(4) 係数 α, β, γ を任意に選んで

$$C=\alpha A^2+\beta A+\gamma I$$

で与えられる 3 次行列 C を考えるとき，$C'=AC$ で定義される行列 C' も，ある係数 α', β', γ' を用いて

$$C'=\alpha' A^2+\beta' A+\gamma' I$$

と表され，それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

の関係がある．3 次行列 M を定め，その固有値を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211318)

13.11 行列 $A=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\0&1&-1\\2&1&5\end{pmatrix}$ について，(a)〜(c) に答えよ．

(a) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(b) 行列 A の固有値とその固有ベクトルを求めよ．ただし，導出過程も示すこと．

(c) 行列 A を対角化する行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ．ただし，導出過程も示すこと．

(山梨大 2021)　　(m20211803)

13.12 次の行列 A に対して，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&-1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) A の固有値を求めよ．

(4) $A^2 - 3I$ の階数を答えよ．ただし，ここで I は単位行列とする．

(信州大 2021)　　(m20211904)

13.13 a は定数とする．このとき，行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定せよ．

(信州大 2022)　　(m20221905)

13.14 実数 t の実数値関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ についての連立微分方程式

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 6x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

を考える．また，$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正方行列 P を一つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(3) P を前問 (2) におけるものとし，実数 t の実数値関数 $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ を

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

により定める．このとき，$(*)$ を y_1，y_2 についての連立微分方程式に書き換えなさい．また，y_1, y_2 を求めなさい．

(4) x_1, x_2 を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212102)

13.15 次の行列が対角化可能であるか調べ，対角化可能ならば，与えられた行列 A に対し，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P とそのときの対角行列を 1 組求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(金沢大 2021)　　(m20212205)

13.16 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値，および各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) A が対角化可能であるかどうを調べよ．さらに，A が対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求めよ．

(3) 3 次実正方行列 B が $AB = BA$ を満たすとき，B は対角化可能であることを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212206)

13.17 (a) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい．

(b) 関数 $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2$ は任意の実数 x, y に対して $f(x, y) \geq 0$ を満たすことを示しなさい．

(金沢大 2021)　　(m20212214)

13.18 以下に示す行列の行列式及び固有値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2021)　　(m20212406)

13.19 以下の行列を対角化せよ．

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　　(m20212407)

13.20 正方行列 A がある．ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ が行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルである ($A\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi}$) とき，以下の問いに答えよ．ただし，$I$ は A と同じ次数の単位行列とする．

(1) ベクトル $-\boldsymbol{\varphi}$ も行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 $A + I$ の固有値 $\lambda + 1$ に属する固有ベクトルであることを示せ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 A^2 の固有値 λ^2 に属する固有ベクトルであることを示せ．

(福井大 2021)　　(m20212413)

13.21 以下の行列 A，およびベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を考える．a を実数とし，以下に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A\boldsymbol{u}$ を計算することにより，$\boldsymbol{u}$ は a の値によらず A の固有ベクトルであることを示せ．また 固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対する固有値を求めよ．

（注）固有方程式を使う必要はない．

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}$ が A の固有ベクトルとなるように，a の値を定めよ．また，そのときの固有値（固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対する固有値）を求めよ．

（注）固有方程式を使う必要はない．

(3) $a = 0$ のとき，A の固有値を全て求めよ．

(福井大 2021)　　(m20212416)

13.22 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2021) (m20212425)

13.23 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ．

(2) $\Phi_A(A) = 0$（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ．

(福井大 2021) (m20212426)

13.24 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}$ は行列 A の固有ベクトルであるであることを示せ．また，$\boldsymbol{v}$ に対応する A の固有値を求めよ．

(2) 3 次元空間内のある平面 α を考え，その上の任意の点 P を (x, y, z) とする．この α がベクトル $\boldsymbol{v}$ に垂直で，かつ 3 次元空間の原点を通るとき，この平面 α を表す式を，x, y, z を用いて求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与える．このとき，(2) で求めた平面 α 上の任意の点 Q を f によって移動した点 Q' も平面 α 上の点となることを示せ．

(豊橋技科大 2022) (m20222701)

13.25 k は定数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2k \\ -1 & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) A が対角化可能であるような k の値をすべて求めよ．

(名古屋工業大 2021) (m20212905)

13.26 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．

(名古屋工業大 2022) (m20222906)

13.27 4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有ベクトルのみから成る $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底を 1 組求めよ.

(京都工芸繊維大 2021)　　(m20213401)

13.28 (1) 実数を成分に持つ対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の小問に答えよ.

(a) A の固有値をすべて求めよ.

(b) A を直交行列によって対角化せよ.

(2) 実数を成分に持つ 3 次の対称行列 B が，3 つの相異なる固有値を持つとする．B の異なる固有値に対応する固有ベクトルは，互いに直交することを示せ.

(大阪大 2021)　　(m20213507)

13.29 実数 a, b に対し 3 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が相異なる 3 つの固有値をもつための a, b の条件を求めよ.

(3) (2) の条件が成り立つとき，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

(神戸大 2021)　　(m20213801)

13.30 S を 2×2 実対称行列とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 行列 S が正定値（すべての固有値が正）のとき，S の $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分は 0 でないことを示せ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1\, dx_2$ を極座標に変換することにより求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^T S x\right) dx_2$ を x_1 の関数として求めよ．ただし，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ であり，S は正定数とする.

(神戸大 2021)　　(m20213803)

13.31 $n \geqq 2$ を自然数とし，X をすべての成分が $\dfrac{1}{n}$ であるような n 次正方行列とする．以下の各問いに答えよ.

(1) X^2 を X で表せ，ただし X^2 以外の形で表すこと.

(2) X の固有値とその重複度を求めよ.

(3) X を対角化せよ．対角化できる場合は変換の行列 P も与えること.

(神戸大 2021)　　(m20213807)

13.32 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) A が正則行列であることを示し，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) A のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(3) 3 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを一つ求め，さらにそのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(4) $B = A^{-1} + A^2 + A^3$ とおく．B のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(広島大 2021)　　(m20214102)

13.33 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $M(2,\mathbb{C})$ で表す．E_2 を 2 次の単位行列とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C})$ に対し，A の随伴行列 A^* を

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

により定める．ただし，複素数 z に対し $\overline{z}$ は z の複素共役を表す．また

$$H(2) = \{A \in M(2,\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$
$$U(2) = \left\{A \in M(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; P \text{ は正則で} \quad P^{-1} = P^* \right\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $A \in H(2)$ とする．A の固有値は実数であることを示せ．

(2) $A \in H(2)$ とする．A がただ一つの固有値をもつならば，ある実数 λ が存在して $A = \lambda E_2$ となることを示せ．

(3) $A \in H(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとするとき，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

が成り立つことを示せ．ただし，(,) は $\mathbb{C}^2$ の標準エルミート内積である．

(4) $A \in H(2)$ に対し，ある $P \in U(2)$ が存在して P^*AP が対角行列となることを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214104)

13.34 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & b \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$ の固有ベクトルの一つは $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．

(1) 実数 a, b の値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

(3) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^4 - 3\boldsymbol{A}^3 + 4\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ とする．$\boldsymbol{A}$ の対角化を利用して，$\boldsymbol{B}$ の行列式の値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{E}$ は単位行列である．

(広島大 2022)　　(m20224105)

13.35 次のような定数行列 $\boldsymbol{A}$ によるベクトル $\overrightarrow{x}_i$ からベクトル $\overrightarrow{y}_i$ への変換を考える．

$$\overrightarrow{y}_i = \boldsymbol{A}\overrightarrow{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

この変換により，$\overrightarrow{x}_1 = (4 \quad 2)^T$ は $\overrightarrow{y}_1 = (6 \quad 3)^T$，$\overrightarrow{x}_2 = (8 \quad 6)^T$ は $\overrightarrow{y}_2 = (13 \quad 8)^T$ へ変換される場合の行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．また，その行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．ここで，$(\quad)^T$ は転置行列を表している．

(山口大 2021)　　(m20214302)

13.36 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214607)

13.37 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A を対角化する正則行列 P，および逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて $P^{-1}AP$ を計算せよ．

(九州大 2021)　　(m20214701)

13.38 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく．λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1)」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2021)　　(m20214705)

13.39 $a \geq 0$ として，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $a = 4$ のとき，A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) A が対角化可能でないような a の値をすべて求めよ．

(九州大 2021)　　(m20214709)

13.40 A, B, Q を n 次実正方行列とし，A は正則行列で，Q は対称行列であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，必要ならば，実対称行列は実直交行列により対角化可能であることを証明なしで用いてよい．

(1) BA を AB, A, A^{-1} の積で表せ．

(2) BA がある正則行列により対角行列 D に対角化可能ならば，AB も D に対角化可能であることを示せ．

(3) $A = Q^2$ かつ B が対称行列であるとき，AB は対角化可能で，かつその固有値はすべて実数であることを示せ．

(4) A は固有値がすべて正である対称行列で，B は対称行列であるとする．このとき，AB は対角化可能で，かつその固有値はすべて実数であることを示せ．

(九州大 2021)　　(m20214711)

13.41　次の 2 次正方行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ．

(3) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(4) (3) で求めた行列 A の各固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(5) 行列 A が対角化可能か調べ，対角化可能であれば適当な正則行列 P を求め，対角化せよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214905)

13.42　次の行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(2) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(3) 行列 A は固有値 1 をもつ．1 以外の A の固有値をすべて求めよ．また，求めた固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(4) A が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば対角化せよ．

(5) 外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ と，その $\boldsymbol{b}$ との内積 $\boldsymbol{b}^t(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ をそれぞれ求めよ．ただし $\boldsymbol{b}^t$ は $\boldsymbol{b}$ の転置を表す．

(佐賀大 2021)　　(m20214919)

13.43　$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$　（ ただし，$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ）で表される数列について，
x_n, y_n を n で表しなさい．

(佐賀大 2021)　　(m20214925)

13.44　行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の転置行列を ${}^t\boldsymbol{A}$ とするとき，${}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ を計算せよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値 λ を求めよ．

(鹿児島大 2021)　　(m20215405)

13.45　行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する固有値 λ_1 を求めなさい．また，行列 B の固有値 $\lambda_2 = 2$ に対応する大きさが 1 の固有ベクトル $\overrightarrow{v_2}$ をすべて求めなさい．

(鹿児島大 2021)　　(m20215410)

13.46　(1) 次の行列の階数（ランク）を求めよ．

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列の固有値を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(香川大 2021)　　(m20215707)

13.47 行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ は対角化可能である．対角化のための正則行列 P を求めて，A を対角化せよ．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216004)

13.48 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して，$B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216407)

13.49 3 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ につて，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 固有値をすべて求めなさい．

(2) 各固有値に対応する固有ベクトルを 1 つずつ求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ により A を対角化する正則行列 P を一つ求め，A を対角化しなさい．

(和歌山大 20221)　　(m20216501)

14 線形空間など

14.1 n を 1 以上の整数とし，V を n 次元実ベクトル空間とする．S と T を V から V への線形写像とし，I を V から V への恒等写像とする．$S \circ T = I$ が成り立つと仮定する．以下の問いに答えよ¿

(1) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底とするとき，$\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ も V の基底であることを示せ．

(2) T は全射であることを示せ．

(3) $T \circ S = I$ が成り立つことを示せ．

(東北大 2021)　　(m20210507)

14.2 次の行列 A について，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & a & b \\ -1 & 2 & c & d \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換 f の像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間となるときの a, b, c, d の値を求めよ．

(2) a, b, c, d が (1) の値のときの $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ の解空間の次元と 1 組の基底を求めよ．

(3) f を a, b, c, d が (1) の値のときの $\mathbb{R}^4$ の線形変換とし，g を $\mathbb{R}^4$ の線形変換で，像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間であるものとする．このとき，g と f との合成写像 $f \circ g$ の像空間の次元のとり得る値の範囲を答え, その範囲のそれぞれの次元となる g の例をあげよ．

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210605)

14.3 $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b-2c+d \\ a-b-5c-2d \end{pmatrix}$ の核 $(\mathrm{Ker} f)$ と像 $(\mathrm{Im} f)$ の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210609)

14.4 $a \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^4$ の標準内積を $\langle \cdot\, ,\, \cdot \rangle$ とする．$\mathbb{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \langle \boldsymbol{w},\, \boldsymbol{v}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \right\}$$

で定める．また

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，行列 A で定まる線形写像を $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ とする．

(1) A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ．

(2) $\dim V = 2$ であるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対して，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ と V の共通部分の基底を 1 組求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211301)

14.5 U, V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$\dim U > \dim V$ とする．また，$f : U \to V$ を線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ は U の部分空間であることを示せ．

(2) f が単射であることは $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$ と同値であることを示せ．ここで，$\mathbf{0}_U$ は U のゼロベクトルである．

(3) 線形写像 $g : V \to U$ であって，合成写像 $g \circ f$ が同型写像になるものは存在しないことを示せ．

(4) 線形写像 $g : V \to U$ であって，合成写像 $g \circ f$ が同型写像になるものが存在することと，f が全射であることが同値であることを示せ．

(筑波大 2021)　　(m20211302)

14.6 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換 f について，以下の問に答えよ．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x+y \\ 4x \end{bmatrix}$$

(1) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f の表現行列であることを示せ．

(2) H の固有値，各固有値の固有空間をそれぞれ求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底で，その基底に関する f の表現行列が対角行列になるようなものを 1 つ求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211310)

14.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底を一組求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$ の次元が 2 となる自然数 n を求め，その n について V の基底を一組求めよ．

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ かつ $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ を満たす，一次独立であるベクトル $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ の組を決定せよ．

(茨城大 2021)　　(m20211701)

14.8 X, Y が空でない集合で，f は X から Y への写像とする． Y の空でない部分集合で A, B に対し，$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ が成り立つことを示せ．ただし，Y の空でない部分集合 C に対し，$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$ と定める．

(茨城大 2021)　　(m20211704)

14.9 $\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$ をベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．つまり，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

である．また，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ長さが 1 で，かつ内積 $\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$ に関して互いに直交しているとする（k は 1 以上 n 以下の整数）． 写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_k \rangle \boldsymbol{v}_k \\ &= \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

(1) F は線形写像であることを示せ．

(2) $F(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ のそれぞれと直交していることを示せ．

(3) $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k\}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間を V とする． $\boldsymbol{v} \in V$ ならば，$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ（ただし，ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである）．

(4) $F^2 = F$ を満たすことを示せ．

(5) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle F(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\ F(\boldsymbol{w}) \rangle$ が成り立つことを示せ．

(信州大 2021)　　(m20211905)

14.10 (1) $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{R}$ 上 1 次従属となるような実数 α の値を求めよ．

(2) β を実数とする．$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元が 2 となるときの β の値を求めよ．また，そのときの W の 1 組の基底を求めよ．

(3) 写像

$$f : \boldsymbol{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$$

が線形写像ではないことを示せ.

(金沢大 2021)　　(m20212207)

14.11 実 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ について，次の問いに答えよ.

(1) 4 つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $\mathbb{R}^4$ の基底を成すか判定せよ.

(2) 0 でない実数 a, b, c, d に対し，4 つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

が生成する $\mathbb{R}^4$ の部分空間の次元を求めよ.

(神戸大 2021)　　(m20213802)

14.12 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \; f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) A の階数 rank A を求めよ.

(2) A の核 Ker(f) の基底を求めよ.

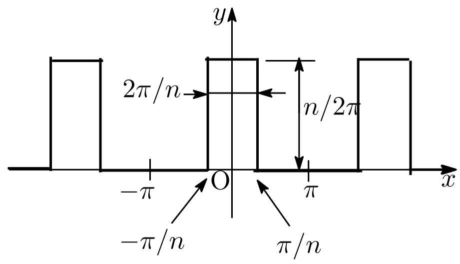
(3) 行列 A とその転置 ${}^t\!A$ の積 $A\,{}^t\!A$ が対角化可能かどうか調べ，対角化可能なら $P^{-1} A\,{}^t\!A P$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ.

(はこだて未来大 2021)　　(m20216301)

応用数学

15 応用数学

15.1 右図のような周期 2π の周期的パルス列 $f(x)$ を考える．パルスの幅は $2\pi/n$，高さは $n/2\pi$ で与えられ，面積は常に 1 である（ただし n は 2 以上の整数）．この波形は y 軸に関して軸対称なので，次式のようなフーリエ級数に展開することができる．以下の設問に答えなさい．



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

(1) $n = 2$ のとき，a_k $(k \geqq 1)$ を求めなさい．

(2) 2 以上の整数 n について，a_k $(k \geqq 1)$ を n の関数として表しなさい．

(3) (2) の結果において，n を ∞ に漸近させると，与えられたパレス列はデルタ関数列になる．この条件における a_k を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210103)

15.2 1 の 3 乗根のうち 1 でない解を ω, ω' とする．以下の設問に答えなさい．

(1) $\omega\omega' = 1$ を示しなさい．

(2) $\omega^2 = \overline{\omega} = \omega'$ を示しなさい．ただし，$\overline{\omega}$ は ω の複素共役を表す．

(3) $\omega^{100} + \omega^{50} + 1$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \omega^k$ を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210104)

15.3 (1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\cos\theta$ を z の有理式で表せ．ただし，i は虚数単位で，e は自然対数の底とする．

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4z+1)^2}$ の極をすべて求めよ．更に，絶対値が 1 より小さい極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211006)

15.4 虚数単位 i の平方根を複素平面上に図示しなさい．

(金沢大 2021)　　(m20212211)

15.5 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ で表される曲線を考える．

(a) $\boldsymbol{r}(t)$ での単位接線ベクトルを求めなさい．

(b) $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で，この曲線に沿って線積分 $\displaystyle\int_C xy^2 ds$ を求めなさい．ただし ds は曲線の線素とする．

(金沢大 2021)　　(m20212213)

15.6 (1) 複素フーリエ級数展開を用いて以下の関数が成立することを示せ

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

(2) 関数 $f(t)$ 及び $g(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ 及び $G(\omega)$ と表す．このとき，以下のフーリエ変換が $F(\omega)G(\omega)$ となることを示せ．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

(福井大 2021)　　(m20212412)

15.7 xyz 座標系における 3 つのベクトルを $\boldsymbol{A} = \left(A_x,\ A_y,\ A_z\right)$，$\boldsymbol{B} = \left(B_x,\ B_y,\ B_z\right)$，$\boldsymbol{C} = \left(C_x,\ C_y,\ C_z\right)$ とする．

(1) $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ の x, y, z 成分をそれぞれ $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_x$，$(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_y$，$(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_z$ とする．これらと A_y，および A_z の中から必要なものを用いて，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ の x 成分 $[A\times(B\times C)]_x$ を表せ．

(2) $[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_x$ をベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ および B_x, C_x を用いて表せ．

(3) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ が成り立つことを示せ．

(大阪大 2021)　　(m20213501)

15.8 原点を中心とした半径 r $(r\neq 0)$ の球面 S は媒介変数 u, v（ラジアン単位）を用いて，

$$\boldsymbol{r}\big(=\boldsymbol{r}(u,\ v)\big) = r\,\boldsymbol{i}_r = r\cos u\cos v\ \boldsymbol{i}_x + r\sin u\cos v\ \boldsymbol{i}_y + r\sin v\ \boldsymbol{i}_z$$
$$(0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x$，$\boldsymbol{i}_y$，$\boldsymbol{i}_z$ は x，y，z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u}\times\dfrac{\partial r}{\partial v}$ を r，$\boldsymbol{i}_r$，v で表せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分，

$$\iint_S \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．

(大阪大 2021)　　(m20213502)

15.9 複素数 z に関する以下の複素関数 $f(z)$ を考える．

$$f(z) = \frac{z^2+2z+1}{(3z^2-10z+3)(2z^2+5z+2)}$$

(1) $f(z)$ の孤立特異点を全て求めよ．

(2) (1) で求めた孤立特異点のうち，$|z|<1$ を満たすそれぞれの点における $f(z)$ の留数を求めよ．

(3) $|z|=1$ のとき，実数 θ $(0\leq\theta<2\pi)$ を用いて $z=e^{i\theta}$ とおける．ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．このとき，$\cos\theta$ を z を用いて表せ．

(4) 以下の積分を複素積分に置き換えることにより，その値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta+1}{(5-3\cos\theta)(5+4\cos\theta)}\,d\theta$$

(大阪大 2021)　　(m20213504)

15.10 ベクトル $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $r = |\vec{r}| \neq 0$ であるとき，次の式を求めよ．ただし，$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ は x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．それぞれの途中の計算式も明記すること．

(1) $\mathrm{grad}\, r$　　　　(2) $\mathrm{div}\, \frac{\vec{r}}{r^n}$

(広島大 2021)　　(m20214106)

15.11 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする．
ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{i} - 2xye^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\nabla \times \boldsymbol{a}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} = \nabla\phi$ となるようなスカラー関数 ϕ が存在するか否かを答えよ．存在する場合は，ϕ を求めよ．ただし，原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ において $\phi = 0$ とする．

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$　$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で与えられる曲線 C 上で，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ．

(九州大 2021)　　(m20214703)

15.12 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

で表される．以下の問いに答えよ．

(1) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(3) 次の無限級数の和を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

(九州大 2021)　　(m20214704)

15.13 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの虚数 $\alpha = 1+2i$, $\beta = 4-2i$ に対して，$\gamma = \dfrac{2\alpha\overline{\beta}}{2\alpha - 3\beta}$ とする．γ を $x+yi$（x, y は実数）の形で表し，複素平面上に図示せよ．ただし，$\overline{\beta}$ は β の共役複素数を表す．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^{-4} = 16$ の解をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215304)

15.14 曲線 C : $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = \sqrt{3}\cdot t$　$(0 \le t \le 2\pi)$ のとき，次式を求めなさい．
ただし，s は曲線の長さを表す．

$$\int_C (xy+z)ds$$

(鹿児島大 2021)　　(m20215420)

15.15 直交座標系において，ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = (2y, -2x, z)$ が与えられているとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(1) $\nabla(A \cdot A) \quad (= \mathrm{grad}(A \cdot A)\ )$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot (xyzA) \quad (= \mathrm{div}(xyzA)\ )$ を求めよ．

(3) $\nabla \times A \quad (= \mathrm{rot}A\ )$ を求めよ．

(4) 4 点 $P(1,1,0)$, $Q(-1,1,0)$, $R(-1,-1,0)$, $S(1,-1,0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って $P \to Q \to R \to S \to P$ の順に一周する線積分 $\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．
ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す．

(室蘭工業大 2021) (m20215504)

確率統計

16 確率統計

16.1 あるサイコロを振ったところ, 出た目は次の通りであった．カイ 2 乗検定を行い，有意水準 5 %でこのサイコロが公平なサイコロと言えるかどうかを確かめよ．なお，カイ 2 乗分布表より $\chi^2_5(0.05)$ 値は 11.070 である．

目	1	2	3	4	5	6
回数	20	12	9	16	11	22

(お茶の水女子大 2021) (m20210603)

16.2 確率変数 X について，その平均 $\mu = E(X)$，分散 $\sigma^2 = V(X)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) X は確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型の確率変数とした場合，定数 $k > 0$ に対して $|X - \mu| \geq k$ を満たす確率の上限を求めよ．

(2) $E(X) = 2$, $E(X^2) = 9$ のとき，(1) の結果を用いて，$-1 < X < 5$ を満たす確率の下限を求めよ．

(3) X_1, X_2, $\cdots$, X_{16} が正規分布 $N(2, 4)$ からの無作為標本であるとき，標本平均 $\overline{X}$ に対して $|\overline{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を求めよ．さらに，(1) を用いて $|\overline{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を上限もしくは下限で評価し，両者を比較せよ．

付表 1 標準正規分布表：$Q = \displaystyle\int_0^z \phi(t)dt$, 但し，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数 （省略）

付表 2

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

(筑波大 2021) (m20211313)

16.3 A 大学と B 大学において，1 年生の数学の学力に差があるかどうかを調べるために，A 大学から 9 人，B 大学から 7 人をそれぞれ無作為に選んで，実力テストを行ったところ，次のような結果を得た．

A 大学	72	73	84	65	75	92	81	74	59
B 大学	45	48	89	50	44	57	87		

A 大学，B 大学のテストの点数はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A,\ \sigma^2_A)$, $N(\mu_B,\ \sigma^2_B)$ に従うと仮定する．以下の問に答えよ．

(1) テストの点数のばらつきは A 大学，B 大学 で等しいと見なしてよいか．有意水準 5% で等分散検定せよ．

(2) A 大学と B 大学で数学の学力に差があると言えるか．有意水準 5% で検定せよ．

付表３ F 分布表：分子の自由度 m_1，分母の自由度 m_2 の F 分布の上側 5% 点 $F_{0.05}(m_1, m_2)$（上段）と上側 2.5% 点 $F_{0.025}(m_1, m_2)$（下段）

m_1 ＼ m_2	6	7	8	9
6	4.28	3.87	3.58	3.37
	5.82	5.12	4.65	4.32
7	4.21	3.79	3.50	3.29
	5.70	4.99	4.53	4.20
8	4.15	3.73	3.44	3.23
	5.60	4.90	4.43	4.10
9	4.10	3.68	3.39	3.18
	5.52	4.82	4.36	4.03

付表４ t 分布表：自由度 m の両側 100α% 点 $t_\alpha(m)$

α ＼ m	6	7	8	9	14	15	16
0.1	1.943	1.895	1.860	1.833	1.761	1.753	1.746
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.145	2.131	2.120

(筑波大 2021)　　(m20211314)

16.4 ある会社は，A，B，C 社から同じ製品を 2 : 3 : 5 の比率で購入している．A，B，C 社の製品にはそれぞれ 2.5%，1.5%，1.0% の割合で不良品が含まれていることがわかっている．

このとき，次の (a)〜(b) に答えよ．

(a) 購入した製品の中から任意に取り出した製品 1 個が不良品である確率を求めよ．

(b) 購入した製品の中から任意に 1 個を取り出したところ，不良品であった．取り出した不良品が，① A 社の製品である確率，② B 社の製品である確率，　③ C 社の製品である確率をそれぞれ求めよ．

(山梨大 2021)　　(m20211802)

16.5 箱の中に 1 個の赤玉と 2 個の白玉が入っている．この箱からでたらめに 1 個の玉を取り出して，その色を確かめてから元に戻す．n を自然数として，この試行を $3n$ 回繰り返したとき，赤玉が k 回取り出される確率を P_k，$k = 0, 1, \cdots, 3n$ とする．下の問いに答えなさい．

(1) P_k を n と k を用いて表しなさい．

(2) $r_k = \dfrac{P_{k+1}}{P_k}$，$k = 0, 1, \cdots, 3n-1$ とおく．r_k を n と k を用いて表しなさい．

(3) $P_{k+1} > P_k$ と $r_k > 1$ が同値であることを利用して，P_k が最大となる k を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212104)

16.6 あるくじ引きにおいて，1 回くじを引いて当たりの出る確率が $p = 1/3$ である．A，B，C の 3 人が，順番にくじを引く．一回一回のくじ引きの結果が独立であるものとして，以下の問いに答えよ．

(1) $A \to B \to C$ の順でこのくじを 1 回ずつ引き，最初に当たりを出した人を勝ちとする. 3 人とも当たりを出さなかった場合は，勝者はいないものとする．C が勝つ確率を求めよ．

(2) $A \to B \to C \to A \to B \to C \to \cdots$ の順で誰かが当たりを出すまでこのくじ引きを続けることとし，最初に当たりを出した人を勝ちとする．C が勝つ確率を求めよ．

(福井大 2021)　　(m20212409)

16.7　2 つの確率変数 X と Y $(-1 < X < 1,\ -1 < Y < 1)$ の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ が下記のように表されるとき，以下の問いに答えよ．

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2+x+y}{8}\ ,\quad -1 < x < 1,\quad -1 < y < 1$$

(1) 確率変数 X と Y のそれぞれの期待値 $EX,\quad EY$ を求めよ．

(2) 確率変数 $Z = X - Y$ の期待値 EZ を求めよ．

(福井大 2021)　　(m20212410)

16.8　$n = 1,2,3$ に対して，次のように定める関数 $A_n(x)$ と定積分 B_n がある．以下の設問に答えよ．

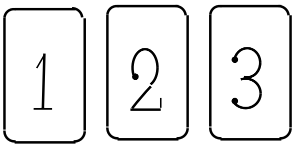
$$A_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x},\ \ A_2(x) = \sin x,\ \ A_3(x) = \sin^3 x \quad (\pi/3 \leq x \leq \pi/2)$$

$$B_n = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_n(x)dx$$

(1) $\pi/3 < x_0 < \pi/2$ のとき，$A_1(x_0),\ A_2(x_0),\ A_3(x_0)$ を値の小さい方から順に並べよ．

(2) 定積分 $B_1,\ B_2,\ B_3$ をそれぞれ求めよ．

(3) 図のように，3 枚のカードに 1 から 3 までの数字が 1 つずつ書かれている．この 3 枚のカードの中から無作為にカードを 1 枚選び，そのカードに書かれている数字を n とする．この操作を 2 度行うとき，少なくとも 1 度は $B_n > 1/2$ となる数字 n が書かれているカードを選ぶ確率を求めよ．ただし，1 度目の操作後に選んだカードは元に戻し，2 度目でも 1 度目と同じ操作を行うものとする．



(豊橋技科大 2021)　　(m20212705)

16.9　1, 2, 3, 4 のうち 1 つの数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ，合計 4 枚のカードが箱の中に入っている．次の問いに答えよ．ただし，答えが分数になる場合は既約分数で答えよ．

(1) 箱からカードを 1 枚取り出して箱に戻すことを 4 回続けて行うとき，4 回とも同じ数字のカードを取り出す確率を求めよ．

(2) 箱からカードを 1 枚取り出して箱に戻すことを 4 回続けて行うとき，同じ数字のカードを 2 回以上取り出す確率を求めよ．

(3) 箱からカードを 1 枚ずつ順に 4 枚すべてを取り出すとき，最初に偶数，最後に奇数が書かれたカードを取り出す確率を求めよ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222704)

16.10　(1) ある感染症に対して一定の精度で陽性か否かを診断する検査法があるものとする．A を検査結果が陽性となる事象，B を被検査者が実際に感染症にかかっている事象とする．また，確率 $P(B) = 0.1$ とする．B が起こったとき A が起こる条件付き確率を $P(A|B)$ と表す．

(a) $P(A|B) = 0.9,\ P(\overline{A}\,|\,\overline{B}\,) = 0.9$ であるとき，$P(B|A)$ を求めよ．ただし，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ はそれぞれ A と B の余事象を表す．

(b) $P(A|B) = P(\overline{A}\,|\,\overline{B}\,) = t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ とおく．$P(B|A) \geq 0.95$ となる t の範囲を求めよ．ただし，t は小数第三位まで答えるものとする．

(2) 正規分布に従う母集団から 10 個の標本を無作為に抽出したところ，その標本平均は 100.8，標本分散は 8.56 であった さらに，これを A 群，B 群の二つの群に分けたところ，A 群の標本は $\{97,\ 103,\ 102,\ 106\}$ であった．以下の問いに答えよ．ただし，解答は有理数または小数第一位までの数値で答えるものとする．

(a) A 群の不偏分散を求めよ．

(b) B 群の不偏分散を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213505)

16.11 赤玉 6 個，白玉 4 個の合計 10 個の玉が入っている袋がある．まず 1 回目の試行として，袋から同時に 3 個の玉を取り出す．取り出した玉は袋に戻さず，さらに 2 回目の試行として，袋から同時に 3 個の玉を取り出す．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，各試行において同時に 3 個の玉を取り出す取り出し方は同様に確からしいものとする．

(1) 1 回目の試行で赤玉 3 個が取り出される確率を求めよ．

(2) 1 回目の試行で赤玉 2 個，白玉 1 個が取り出される確率を求めよ．

(3) 1 回目の試行で取り出された赤玉の数と 2 回目の試行で取り出された赤玉の数が同じになり，かつ 1 回目の試行で取り出された白玉の数と 2 回目の試行で取り出された白玉の数が同じになる確率を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213508)

16.12 ボールが m 個入った箱を考える．この箱に対して，「確率 p でボールを 2 個取り出し，確率 $1-p$ でボールを 3 個追加する.」という試行を n 回行う．ただし，$0<p<1$ であり，m と n は $m>2n$ を満たすとする．n 回試行を行った後に箱の中に入っているボールの数を X とする．また，n 回の試行のうちボールを追加した回数を Y とする．このとき，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) $m,\ n$ および Y を用いて X を表しなさい．

(2) Y の期待値 $E(Y)$ および分散 $V(Y)$ を求めなさい．

(3) X の期待値 $E(X)$ および分散 $V(X)$ を求めなさい．

(和歌山大 20221)　　(m20216506)