微分の計算《基本演習》 (NO.1) 解答 1枚目

1. 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+1}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2 x+\cos x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$

(解)

(1) $x=-t$ とおくと, $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t-1}{\sqrt{t^2-2t+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3-\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}}=-3 \quad〃$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2 x+\cos x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{4\sin x\cos x-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{2\sin 2x-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{4\cos 2x-\cos x}=\frac{2}{3} \quad〃$$

(3) $y=\sqrt[x]{x}$ とおくと, $y=x^{\frac{1}{x}}$

両辺の対数をとると, $\log y=\dfrac{1}{x}\log x$

$$\lim_{x\to\infty}\log y=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

$\log y=t$ とおくと, $y=e^t=e^{\log y}$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}e^{\log y}=e^0=1 \quad〃$$

《(1) 別解》

$$与式=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{(x+1)^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{|x+1|}$$

$x\to-\infty$ のとき, $x+1<0$ より,

$|x+1|=-(x+1)$

$$与式=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{-(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{-1-\frac{1}{x}}=-3 \quad〃$$

2. 次の等式が成り立つとき, 定数 a,b の値を求めよ.

$$\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx+6}{x^2-x-2}=\frac{1}{2}$$

(解) $\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2-x-2)=0$

であるから, 極限値が存在するためには

$\displaystyle\lim_{x\to2}(ax^2+bx+6)=0$

でなければならない.

したがって, $4a+2b+6=0$

$\therefore\ b=-2a-3\ \cdots ①$

このとき,

$ax^2+bx+6=ax^2-(2a+3)x+6=(x-2)(ax-3)$

$$\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx+6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(ax-3)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{ax-3}{x+1}=\frac{2a-3}{3}$$

題意より $\dfrac{2a-3}{3}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{9}{4}$ 〃

これを ① に代入して, $b=-\dfrac{15}{2}$ 〃

3. 次の関数を微分せよ.

(1) $y=e^{-3x}(\cos 3x+\sin 3x)$

(2) $y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$

(3) $y=\sqrt{\dfrac{2-\cos^2 x}{2+\cos^2 x}}$

(解)

(1) $$y'=-3e^{-3x}(\cos 3x+\sin 3x)$$
$$+e^{-3x}(-3\sin 3x+3\cos 3x)$$
$$=-3e^{-3x}(\cos 3x+\sin 3x+\sin 3x-\cos 3x)$$
$$=-6e^{-3x}\sin 3x \quad〃$$

(2) $$y'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0 \quad〃$$

(3) $$y=\left\{\frac{2-\cos^2 x}{2+\cos^2 x}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

両辺の対数をとると

$$\log y=\frac{1}{2}\left\{\log(2-\cos^2 x)-\log(2+\cos^2 x)\right\}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left\{\frac{-2\cos x(-\sin x)}{2-\cos^2 x}-\frac{2\cos x(-\sin x)}{2+\cos^2 x}\right\}$$

$$y'=\frac{1}{2}y\cdot2\sin x\cos x\left\{\frac{1}{2-\cos^2 x}+\frac{1}{2+\cos^2 x}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2-\cos^2 x}{2+\cos^2 x}}\cdot\sin x\cos x\cdot\frac{4}{(2-\cos^2 x)(2+\cos^2 x)}$$

$$=\frac{4\sin x\cos x}{\sqrt{2-\cos^2 x}\sqrt{(2+\cos^2 x)^3}} \quad〃$$

《(3) 別解》

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\cos^2 x}{2+\cos^2 x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{(2-\cos^2 x)'(2+\cos^2 x)-(2-\cos^2 x)(2+\cos^2 x)'}{(2+\cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2+\cos^2 x}{2-\cos^2 x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\frac{-2\cos x(-\sin x)(2+\cos^2 x)-(2-\cos^2 x)\cdot 2\cos x(-\sin x)}{(2+\cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+\cos^2 x}{2-\cos^2 x}}$$

$$\cdot\frac{2\sin x\cos x\{(2+\cos^2 x)+(2-\cos^2 x)\}}{(2+\cos^2 x)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\cos^2 x}{2-\cos^2 x}}\cdot\frac{4\sin x\cos x}{(2+\cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{4\sin x\cos x}{\sqrt{2-\cos^2 x}\sqrt{(2+\cos^2 x)^3}} \quad /\!/$$

微分の計算《基本演習》　(NO.1)　解答 2枚目

4. 微分可能な関数 $f(x)$ について，
次の極限値を $a,\ f(a),\ f'(a)$ を用いて表せ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^3f(x)-x^3f(a)}{x-a}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}$　(n は自然数とする)

(解)

(1)
$$\lim_{x\to a}\frac{a^3f(x)-x^3f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{a^3f(x)-a^3f(a)-x^3f(a)+a^3f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{a^3\{f(x)-f(a)\}-f(a)(x^3-a^3)}{x-a}$$
$$=a^3\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}$$
$$=a^3f'(a)-f(a)\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$
$$=a^3f'(a)-f(a)\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)$$
$$=a^3f'(a)-3a^2f(a)\quad〃$$

《参考》上記の一部分の $\dfrac{0}{0}$ の不定形のところは，
次のように，ロピタルの定理を利用してもよい.
$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^3-a^3)'}{(x-a)'}=\lim_{x\to a}\frac{3x^2}{1}=3a^2$$

(2)
$$\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-a^nf(a)-x^nf(a)+a^nf(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{a^n\{f(x)-f(a)\}-f(a)(x^n-a^n)}{x-a}$$
$$=a^n\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$
$$=a^nf'(a)-f(a)\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)'}{(x-a)'}$$
$$=a^nf'(a)-f(a)\lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}}{1}$$
$$=a^nf'(a)-na^{n-1}f(a)\quad〃$$

《参考》上記一部分に，次の因数分解を利用してもよい.
$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

5. 関数 $y=\log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$　$(-1<x<1)$ について，
次の問いに答えよ.

(1) 対数の性質を用いて，関数を微分せよ.

(2) x を y で表せ.

(3) 逆関数の微分法を用いて $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(解)

(1) $-1<x<1$ より　$1-x>0$, $1+x>0$ であるから
$$y=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x}$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\log|1-x|-\log|1+x|\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\log(1-x)-\log(1+x)\Big\}$$
$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{1-x^2}\quad〃$$

(2) (1) より，$y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-x}{1+x}$
よって　$2y=\log\dfrac{1-x}{1+x}$
$$\therefore e^{2y}=\frac{1-x}{1+x}$$
$$(1+x)e^{2y}=1-x\qquad x(1+e^{2y})=1-e^{2y}$$
$$x=\frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}}\quad〃$$

(3)
$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2e^{2y}\cdot(1+e^{2y})-(1-e^{2y})\cdot 2e^{2y}}{(1+e^{2y})^2}$$
$$=\frac{-2e^{2y}-2e^{4y}-2e^{2y}+2e^{4y}}{(1+e^{2y})^2}=\frac{-4e^{2y}}{(1+e^{2y})^2}$$
$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{(1+e^{2y})^2}{4e^{2y}}$$
$$=-\frac{\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}{4\cdot\dfrac{1-x}{1+x}}=-\frac{\left(1+\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2\cdot(1+x)^2}{4\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\cdot(1+x)^2}$$
$$=-\frac{(1+x+1-x)^2}{4(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{1-x^2}\quad〃$$

《参考》　$y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-x}{1+x}$
$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{1-x^2}$$