微分の計算《基本演習》　(NO.2)　解答 1 枚目

1. 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}$

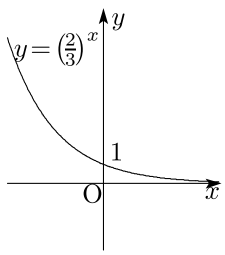
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log(x+1)+\log\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x}\right)\right\}$

(解)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}=-1$ 〃

《参考》



$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$$

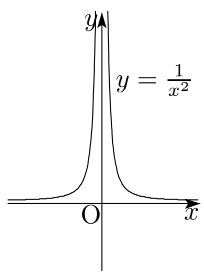
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+x^2-1}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(2x^2+1-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ 〃

《参考》



$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\infty$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log(x+1)+\log\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\sqrt{x+1}+\log\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log\sqrt{x+1}\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x}\right)$

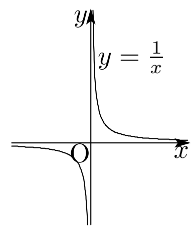
$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\sqrt{x+1}\{(3x+2)-3x\}}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}}+\sqrt{3}}$

$\displaystyle=\log\frac{2}{2\sqrt{3}}=\log\frac{1}{\sqrt{3}}=\log 3^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\log 3$ 〃

《参考》



$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

2. 次の極限値が存在するように定数 a の値を定め,

極限値を求めよ.

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-a}{\sqrt{x+3}-2}$

(解)

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-a}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-a)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3})^2-2^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{(x-a)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)-4}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{(x-a)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

分母について　$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ であるから,

極限値が存在するためには, 分子についても

$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-a)(\sqrt{x+3}+2)=(1-a)(\sqrt{4}+2)=4(1-a)=0$

が成り立つ. $\therefore a=1$ 〃

このとき

与式 $\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)=4$ 〃

(別解)

分母について,　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$ であるから,

極限値を持つためには, 分子についても

$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-a)=1-a=0$ が成り立つ. $\therefore a=1$ 〃

このとき

与式 $\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(\sqrt{x+3}-2)'}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=\lim_{x\to 1}2\sqrt{x+3}=4$ 〃

3. 次の極限値を a, $f(a)$, $f'(a)$ で表せ.

ただし, $a \neq 0$ とし, $f(x)$ は微分可能とする.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(a+h)}{a+h} - \frac{f(a-h)}{a-h} \right\}$$

(解)

$$与式 = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{a+h} \cdot \frac{f(a+h)}{h} + \frac{1}{a-h} \cdot \frac{f(a-h)}{-h} \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{a+h} \cdot \frac{f(a+h) - f(a) + f(a)}{h}$$

$$+ \lim_{h \to 0} \frac{1}{a-h} \cdot \frac{f(a-h) - f(a) + f(a)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{a+h} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a)}{h(a+h)} \right\}$$

$$+ \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{a-h} \cdot \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} - \frac{f(a)}{h(a-h)} \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{a+h} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$+ \lim_{h \to 0} \frac{1}{a-h} \cdot \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

$$+ \lim_{h \to 0} \frac{f(a) \{(a-h) - (a+h)\}}{h(a+h)(a-h)}$$

$$= \frac{1}{a} f'(a) + \frac{1}{a} f'(a) + \lim_{h \to 0} \frac{-2hf(a)}{h(a+h)(a-h)}$$

$$= \frac{2}{a} f'(a) + \lim_{h \to 0} \frac{-2f(a)}{(a+h)(a-h)}$$

$$= \frac{2}{a} f'(a) - \frac{2f(a)}{a^2} = \frac{2}{a^2} \{af'(a) - f(a)\} \quad 〃$$

微分の計算《基本演習》 (NO.2) 解答 2 枚目

4. 次の関数を微分せよ.

$$y = x^2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

(解)

両辺の対数をとると

$$\log y = \log\left\{x^2\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\log y = 2\log x + \frac{1}{2}\left\{\log(1+x^2) - \log(1-x^2)\right\}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{-2x}{1-x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot\left(\frac{2}{x} + \frac{x\left\{(1-x^2)+(1+x^2)\right\}}{(1+x^2)(1-x^2)}\right)$$

$$= x^2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\left\{\frac{2}{x} + \frac{2x}{(1+x^2)(1-x^2)}\right\}$$

$$= x^2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{2\left\{(1-x^4)+x^2\right\}}{x(1+x^2)(1-x^2)}$$

$$= 2x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{1-x^4+x^2}{(1+x^2)(1-x^2)}$$

$$= \frac{2x(1+x^2-x^4)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1-x^2)^3}} \quad 〃$$

(別解)

$$y' = 2x\cdot\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} + x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}\cdot\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'$$

$$= 2x\cdot\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

$$+x^2\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$= \frac{2x\left\{(1+x^2)(1-x^2)+x^2\right\}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$= \frac{2x(1+x^2-x^4)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1-x^2)^3}} \quad 〃$$

5. 次の関数を微分せよ.

$$y = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(解)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)-x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} \quad 〃$$

(別解)

$$\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

両辺を x で微分すると

$$\cos y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}\cdot\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\cos y}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

ここで

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

であるから

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} \quad 〃$$

6. 次の関数について，$x=0$ で連続であるように定数 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の値を定めよ．

$$f(x)=\begin{cases} \cos(x+\theta) & (x \leqq 0) \\ \dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+2}}{x} & (x>0) \end{cases}$$

(解)

$x>0$ のとき

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{(3x+2)-(x+2)}{x\left(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{2}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x<0$ のとき

$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\cos(x+\theta)=\cos\theta$$

$x=0$ で連続ならば，$\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)$ が存在する．

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to-0} f(x)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

このとき

$$f(x)=\begin{cases} \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) & (x \leqq 0) \\ \dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+2}}{x} & (x>0) \end{cases}$$

が成り立ち，

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{2}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore \lim_{x\to0} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

また，$f(0)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \lim_{x\to0} f(x)=f(0)$$

よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

確かに $f(x)$ は $x=0$ で連続である．

ゆえに，求める θ の値は　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$　〃