微分の応用《基本演習》　(NO.1)　解答 1枚目

1. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めよ.

(2) 関数 $y = x\log x$ の増減・極値を調べ, グラフの概形を描け.

(3) 関数 $y = x\log x\quad(0 < x \leqq e)$ の最大値と最小値を求めよ.

(解)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0$　〃

(2) 定義域は　$x > 0$

$y' = (x)'\cdot\log x + x\cdot(\log x)' = \log x + 1$

$y' = 0$ とおくと,

$\log x = -1 \therefore x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

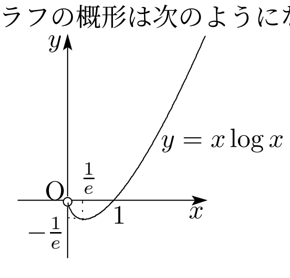
$(y)_{x=\frac{1}{e}} = \dfrac{1}{e}\log e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$

増減表は次のようになる.

x	0	$\dots$	$\frac{1}{e}$	$\dots$
y'	/	$-$	0	$+$
y	/	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

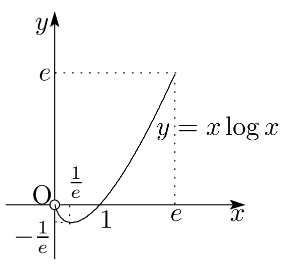
極小値は　$-\dfrac{1}{e}\left(x = \dfrac{1}{e}\text{のとき}\right)$　〃

グラフの概形は次のようになる.



(3) 領域　$0 < x \leqq e$ における増減表は

x	0	$\dots$	$\frac{1}{e}$	$\dots$	e
y'	/	$-$	0	$+$	
y	/	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	e



最大値は　$e\ (x = e\text{ のとき})$　〃

最小値は $-\dfrac{1}{e}\left(x = \dfrac{1}{e}\text{のとき}\right)$　〃

2. 関数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)$ を求めよ.

(2) (1) の極限値を $f(x)$ の $x = 0$ における値と定めるとき, 微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(解)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$　〃

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to0} f(x) = f(0)$

よって, $f(x)$ は $x = 0$ で連続である.

$\displaystyle f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\frac{1}{2}}{x}$

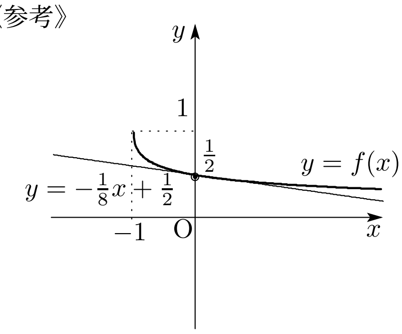
$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{x+1}-(2+x)}{2x^2}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{4(x+1)-(x+2)^2}{2x^2\{2\sqrt{x+1}+(x+2)\}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{-x^2}{2x^2(2\sqrt{x+1}+x+2)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{-1}{2(2\sqrt{x+1}+x+2)} = -\frac{1}{8}$　〃

《参考》



微分の応用《基本演習》　(NO.1)　解答 2枚目

3. t を媒介変数とする x, y の関数から，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の式で表せ.

$$\begin{cases} x = \sin t + 1 \\ y = \cos 2t \end{cases}$$

(解)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{\cos t} = \frac{-4\sin t\cos t}{\cos t} = -4\sin t \quad 〃$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-4\cos t}{\cos t} = -4 \quad 〃$$

(別解)

$$y = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2(x-1)^2 = -2x^2 + 4x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -4x + 4 = -4(\sin t + 1) + 4 = -4\sin t \quad 〃$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-4x+4) = -4 \quad 〃$$

4. 関数 $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ のグラフの概形をかけ.

(解)　$y = f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ とおくと，

$f(-x) = -f(x)$ より，この関数は奇関数だから，

グラフは原点に関して対称になる.

また，分母 $1 - x^2 \neq 0$ より，定義域は $x \neq \pm 1$

$$y' = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{(6x-4x^3)\cdot(1-x^2)^2 - x^2(3-x^2)\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}$$

$$= \frac{(6x-4x^3)(1-x^2) + 4x^3(3-x^2)}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

$y' = 0$ となるのは $x = 0$ と $x = \pm\sqrt{3}$,

$x = 0$ のとき　$y = 0$

$x = -\sqrt{3}$ のとき　$y = \dfrac{(-\sqrt{3})^3}{1-(-\sqrt{3})^2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{1-3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$x = \sqrt{3}$ のとき　$y = \dfrac{(\sqrt{3})^3}{1-(\sqrt{3})^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{1-3} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$y'' = 0$ となるのは $x = 0$　　よって，変曲点は $(0, 0)$

よって増減表は次のようになる.

x		$-\sqrt{3}$	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	$\sqrt{3}$	$\dots$
y'	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$+$	/	$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$	/	$-$	0	$+$	/	$-$		$-$
y	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	/	↗	0	↗	/	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty$$

よって，$x = 1$ は漸近線である.

$$\lim_{x\to -1+0} y = \lim_{x\to -1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1+0} y = \lim_{x\to -1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty$$

よって，$x = -1$ も漸近線である.

次に $y = ax + b$ の形の漸近線があるか調べると，

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x^2} - 1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \{f(x) - (-x)\} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2} - 1} = 0$$

よって，$y = -x$ は漸近線である.

以上より，グラフは次のようになる.