微分の応用《基本演習》 (NO.3) 解答 1枚目

1. 関数 $y=\sqrt{x^2+x+1}$ について，
次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ の $x\to\infty$ のときの漸近線を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の $x\to-\infty$ のときの漸近線を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ の増減，凹凸を調べ，グラフの概形をかけ．

(解)

(1) 求める漸近線を $y=ax+b$ とすると

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$
$$b=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-1\cdot x\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

よって，$x\to\infty$ のときの漸近線は
$$y=x+\frac{1}{2} \quad 〃$$

(2) 求める漸近線を $y=ax+b$ とすると
$x<0$ のとき，$x=-\sqrt{x^2}$ であるから

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{-\sqrt{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-1$$
$$b=\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(-1)\cdot x\}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{x^2}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

よって，$x\to-\infty$ のときの漸近線は
$$y=-x-\frac{1}{2} \quad 〃$$

(3) $y=\sqrt{x^2+x+1}=(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$y'=0$ とおくと，$x=-\dfrac{1}{2}$

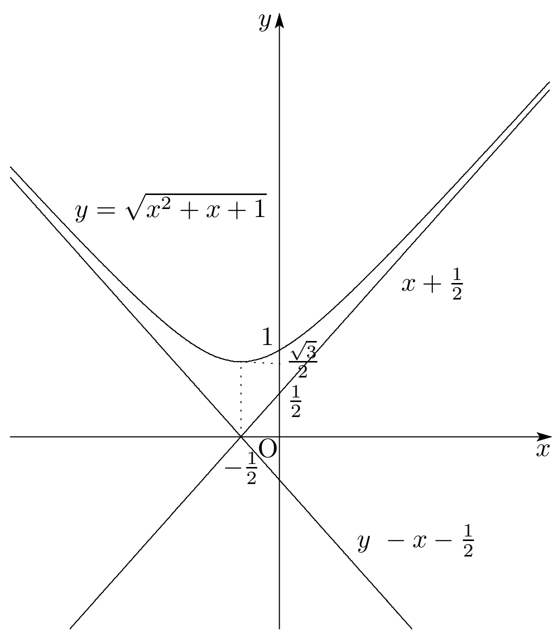
$$\Big(y\Big)_{x=-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)\cdot\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\frac{(4x^2+4x+4)-(4x^2+4x+1)}{4(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\frac{3}{4(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}>0$$

ゆえに，$-\infty<x<\infty$ で，下に凸である．
よって増減表は次のようになる．

x	$\ldots$	$-\frac{1}{2}$	$\ldots$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗

$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき，極小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



2. 放物線 $y=x^2+1$ 上の点 $P(t,t^2+1)$ $(t>0)$ における接線と x 軸との交点を Q とし，P から x 軸に垂線を引き，x 軸との交点を R とする．

(1) $\triangle PQR$ の面積 S を t の式で表せ．

(2) S の最小値を求めよ．

(解)

(1) $y'=2x$ であるから $\Big[y'\Big]_{x=t}=2t$

よって，点 P における接線の方程式は

$y-(t^2+1)=2t(x-t)$ $\therefore y=2tx-t^2+1$

$y=0$ とおくと，$0=2tx-t^2+1$

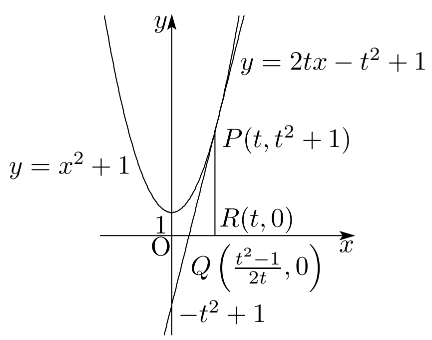
$\therefore x=\dfrac{t^2-1}{2t}$　　よって，$Q\left(\dfrac{t^2-1}{2t},\ 0\right)$

また，$R(t,0)$ であるから

$|QR|=t-\dfrac{t^2-1}{2t}=\dfrac{t^2+1}{2t}$

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^2+1}{2t}\cdot(t^2+1)$

$\therefore S=\dfrac{(t^2+1)^2}{4t}$　$(t>0)$　〃



(2) $S=\dfrac{1}{4}\dfrac{(t^2+1)^2}{t}$

$S'=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2(t^2+1)\cdot 2t\cdot t-(t^2+1)^2\cdot 1}{t^2}$

$=\dfrac{4t^2(t^2+1)-(t^2+1)^2}{4t^2}=\dfrac{(3t^2-1)(t^2+1)}{4t^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}t+1)(\sqrt{3}t-1)(t^2+1)}{4t^2}$

$S'=0$ $(t>0)$ とおくと，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$$S=\frac{\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right\}^2}{4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}}$$

$=\dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	/	$-$	0	$+$
y	/	$\searrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

よって増減表より，S の最小値は

$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　$\left(t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{のとき}\right)$　〃

微分の応用《基本演習》　(NO.3)　解答 2枚目

3. 関数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

について，次の問いに答えよ．

(1) $x=0$ において連続であるかどうかを調べよ．

(2) $x=0$ において微分可能であるかどうかを調べよ．

(解)

(1) $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq 1$ であるから

$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x|$

したがって　$-|x| \leqq x\sin\dfrac{1}{x} \leqq |x|$

よって，

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(-|x|)=0,\quad \lim_{x\to 0}|x|=0$

となるから，

$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

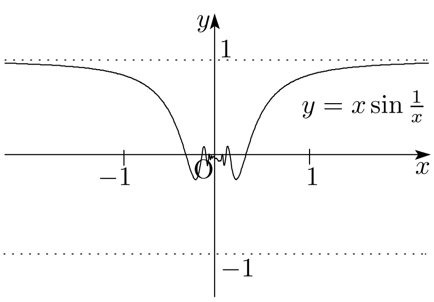
これと題意より

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=0\ ,\qquad f(0)=0$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ となるから

$f(x)$ は $x=0$ において連続である．

《参考》



(2) $\displaystyle f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}\cdots\cdots①$

$h\to 0$ のとき　$\sin\dfrac{1}{h}$ は振動し，

① の極限値は存在しない．

よって，$f(x)$ は $x=0$ において

微分可能ではない．

《参考》

下図の関数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ において，

例えば，x の中から特別な離散数を選んで

$x_n=\dfrac{2}{n\pi}$　($n\neq 0$ の整数) とおくと，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x_n=0$ であるが

$\cdots\cdots,\ f(x_{(-2)})=\sin(-\pi)=0,$

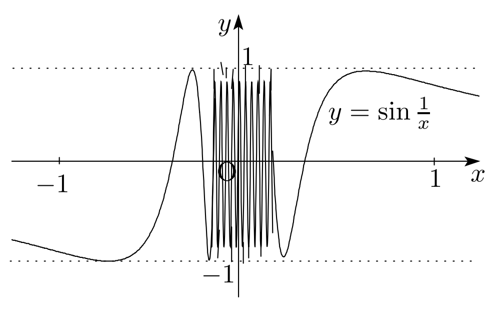
$f(x_{(-1)})=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1,$

$f(x_1)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1,\quad f(x_2)=\sin\pi=0,$

$f(x_3)=\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1,\ \cdots\cdots$

となって，$\{f(x_n)\}$ は振動する．

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ は存在しない．



4. 関数 $y = \sqrt{x}\log x$ の増減・極値・グラフの凹凸・変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(解)

$y' = (\sqrt{x})'\log x + \sqrt{x}(\log x)'$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\log x + 2)$

$y' = 0$ とおくと，$\log x = -2$

$\therefore x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

$x < \dfrac{1}{e^2}$ のとき，減少　〃

$x > \dfrac{1}{e^2}$ のとき，増加　〃

$x = \dfrac{1}{e^2}$ のとき，

$y = \sqrt{\dfrac{1}{e^2}}\log\dfrac{1}{e^2} = \dfrac{1}{e}\log e^{-2} = \dfrac{1}{e}(-2)\log e = -\dfrac{2}{e}$

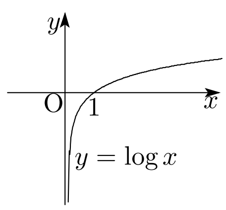
$y' = \dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}(\log x + 2)$ より

$y'' = \dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(\log x + 2) + x^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}(\log x + 2) + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right\}$

$= -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}\left\{(\log x + 2) - 2\right\} = -\dfrac{\log x}{4x\sqrt{x}}$

《参考》



$0 < x < 1$ のとき，$y'' > 0$ より　下に凸　〃

$1 < x$ のとき，$y'' < 0$ より　上に凸　〃

$x = 1$ のとき，$y'' = 0$，　$y = \sqrt{1}\log 1 = 0$

よって，変曲点は $(1, 0)$　〃

$\displaystyle\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x$

$\displaystyle= \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'}$

$\displaystyle= \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\cdot\left(-2x\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+0}\left(-2\sqrt{x}\right) = 0$

増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$		$+$
y''		$+$		$+$	0	$-$
y		$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

極小値　$-\dfrac{2}{e}$　$\left(x = \dfrac{1}{e^2}\text{のとき}\right)$　〃