大学編入学試験問題集（数学）

碓氷軽井沢 IC 数学教育研究所

2012 年 3 月

目 次

基礎数学

1　基礎数学

1.1　3次方程式 $2x^3-9x^2-6x+5=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき, 以下の各式の値を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(群馬大類 23)　　(固有番号 s231501)

1.2　次の3つの直線が与えられたとき．以下の3つの問に答えよ.

$$\begin{cases} y &= ax+b \\ y &= \dfrac{1}{2}x \\ y &= 3x \end{cases}$$

(1) この3つの直線で囲まれる面積が10であり，2つの直線 $y=ax+b$ と $y=\dfrac{1}{2}x$ が垂直に交わるとする．このとき a と b の値を求めよ．ただし，$b>0$ とする.

(2) (1) で求めた a と b の値のとき，この3つの直線で囲まれる領域の中で，x 座標と y 座標がともに整数となる点はいくつあるか．ただし，境界上の点を含む.

(3) (1) で求めた a と b の値のとき，直線 $y=ax+b$ が $x=2$ において，2次曲線 $y=cx^2+8$ と接するとする．このとき，c の値を求めよ.

(群馬大類 23)　　(固有番号 s231502)

1.3　(1) 実数 a,b,c について，不等式 $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ 証明せよ.

(2) 2次方程式 $x^2-5x+d=0$ が虚数解を持つような d の範囲を求めよ.

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232012)

1.4　2次方程式 $x^2-2px+p-2=0$ が，次の条件の2根を持つように p の値の範囲を定めよ.

(1) 1根が正，他の1根が負となる場合.

(2) 1根が -1 と1の間にあり，他の1根が1と2の間にある場合.

(福井大類 23)　　(固有番号 s232411)

1.5　x^4+x^2-6 を，次の範囲で因数分解せよ.

(1) 有理数　　(2) 実数　　(3) 複素数

(福井大類 23)　　(固有番号 s232412)

1.6　次の値を求めよ.

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}} \times x^2y^{\frac{4}{3}}$

(2) $5^{\log_5 7}$

(3) $4\log_2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $(\sin 40^\circ+\sin 50^\circ)^2+(\cos 50^\circ-\cos 40^\circ)^2$

(5) $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ の値

(福井大類 23)　　(固有番号 s232413)

1.7 xy 平面上において，$(x,y)=(0,0)$，$(-2,0)$ を直径の両端とする円 A，および $(x,y)=(0,0)$，$(20,0)$ を直径の両端とする円 B がある．以下の問に答えよ．

(1) 円 A および円 B の両方に接する直線を全て求めよ．

(2) (1) で求めた直線のうち，y 軸と平行でないもの全てに接する任意の円について，円の半径 r をその円の中心座標を用いて表せ．円の中心座標については，適切な文字変数を与えて用いること．

(三重大類 23)　　(固有番号 s233105)

1.8 n を自然数，k を n 以下の自然数とする，n 人の学生が k 個のグループに分かれ，各グループで円状に並ぶときの並び方の総数を $S(n,k)$ と表す．ただし，各グループは 1 名以上の学生を含むものとする．

(1) $S(4,2)=11$ であることを，すべての並び方を列挙することで示せ．ただし，学生を A,B,C,D で表し，A で 1 つのグループ，B,C,D でもう 1 つのグループを構成し，B,C,D がこの順で円状に並ぶことを $\{[A],[B,C,D]\}$ と表すものとする．

なお，$\{[A],[B,C,D]\}$ と $\{[B,C,D],[A]\}$ や $\{[C,D,B],[A]\}$ は同じ並び方を表すが，解答ではこの並び方を表すのにどの形式を用いてもよい．

(2) $S(n,k)=(n-1)S(n-1,k)+S(n-1,k-1)$ が成立することを示せ．ただし，$S(0,0)=1$，各 $i(i\geq 1)$ に対して $S(i,0)=0$ とし，任意の $i,j\ (i<j)$ に対して $S(i,j)=0$ とする．

(3) H_n を

$$H_n=\frac{S(n+1,2)}{n!}$$

とする．H_n を，n を用いて表せ．

(4) 設問 (3) の H_n が，任意の自然数 $n(n\geq 1)$ に対して，

$$\frac{\lfloor \log_2 n\rfloor+1}{2}<H_n\leq \lfloor \log_2 n\rfloor+1$$

を満たすことを示せ．ただし，$\lfloor x\rfloor$ は，x 以下の最大の整数を表すものとする¿

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233507)

1.9 関数 $y=2^x$ の逆関数を求め，そのグラフを描きなさい．

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235405)

1.10 xy 平面上に点 $A(1,5)$，点 $B(4,3)$，点 $C(5,8)$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 点 B から線分 AC へ垂線を下ろしたとき，その足である点 P の座標を求めなさい．

(2) 線分 AB を $1:2$ に内分する点 Q の座標を求めなさい．

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235412)

微分積分 I

2 微分

2.1 関数 $y=e^{-x^2}$ について

(1) y' および y'' を計算せよ．

(2) 増減表を作り, グラフを描け．

(北見工業大類 23)　　(固有番号 s230204)

2.2 次の関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(1) $y = (3x+4)^3$　　(2) $y = x^2 \log x$

(北見工業大類 23)　　(固有番号 s230201)

2.3 すべての実数 x について，不等式

$$\cos x + \sin x \geq 1 + x - \frac{2}{\pi}x^2$$

が成り立つことを示せ.

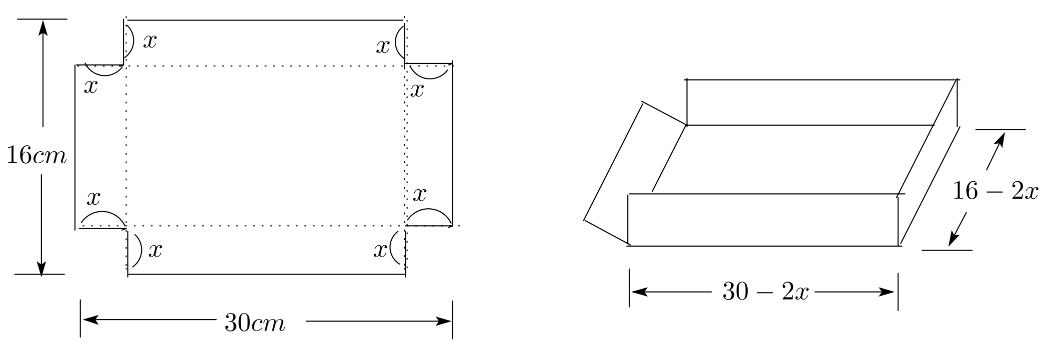
(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230610)

2.4 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 - 3x - 1}\right)$

(千葉大類 23)　　(固有番号 s231201)

2.5 $16cm \times 30cm$ の段ボール紙がある．下図のように，この紙の四隅から一辺 xcm の正方形を取り除き，残りの部分を使って上に開いた箱を作りたい．この箱の容量（体積）を最大にするには x をいくらにしたらよいか答えなさい.



(筑波大類 23)　　(固有番号 s231305)

2.6 x の関数 $f(x) = e^{-x^2}$ に関して以下の問題に答えなさい.

(1) f を 1 回微分した導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) f を n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すとき，ある n 次の多項式 $\phi_n(x)$ によって，$f^{(n)}(x) = \phi_n(x)e^{-x^2}$ と表せることを証明しなさい.

(3) n を任意に固定する．このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x)$ は収束するか．それとも発散するか．理由を付して答えなさい.

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231306)

2.7 正弦関数 $\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を用いた関数の導関数について以下の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ は値域を閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限した主値を表す関数である.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ.

(2) 定義域 $-1 < x < 0$ および $0 < x < 1$ において $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$ を求めよ.

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231316)

2.8 以下の数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ.

$$a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232003)

2.9 $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 5\sin\theta \end{cases}$ で表される点 $P(x, y)$ はどのような曲線を描くか求めなさい.
また, 概略形も示すこと. （フリーハンドでよい）

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232011)

2.10 次の３つの関数のそれぞれの導関数を求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2}$　　(2) $g(x) = -\cos(2x+2)$　　(3) $h(x) = (x+1)(x^2+x+1)$

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232013)

2.11 ３辺の長さが１である台形の面積の最大値を求めなさい.

(長岡技科大類 23)　　(固有番号 s232103)

2.12 次の問に答えよ.

(1) $(1+\sqrt{x}\,)^3$ は x の整式 $p(x), q(x)$ を用いて

$$(1+\sqrt{x}\,)^3 = p(x) + q(x)\sqrt{x}$$

と表すことができる. $p(x)$ と $q(x)$ を求めよ.

(2) 次の等式

$$\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n)} = \frac{-(2n-3)}{2x}\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n-1)}\ ,\quad n = 2, 3, 4, \cdots$$

を示せ. ただし, $(\sqrt{x}\,)^{(n)}$ は $\sqrt{x}$ の n 階導関数である.

(3) $f(x) = (1+\sqrt{x}\,)^3$ とおくとき,

$$f^{(n)}(x) = 3\left(1-\frac{x}{2n-3}\right)\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n)}\ ,\quad n = 2, 3, 4, \cdots$$

を示せ.

(金沢大類 23)　　(固有番号 s232202)

2.13 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義するとき, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し, 微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(金沢大類 23)　　(固有番号 s232207)

2.14 次の極限値を求めよ.
なお, 必要に応じて, 公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を使ってもよい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(福井大類 23)　　(固有番号 s232401)

2.15 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log_e\left(\cos^2 x\right)$ (2) $y = x^{\tan^{-1} x}$

(福井大類 23) (固有番号 s232402)

2.16 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin x^2$ (2) $y = \cos x\ \sin^2 x$ (3) $y = 2^{3x}$ (4) $y = x^x$

(福井大類 23) (固有番号 s232414)

2.17 a を 1 より大きい定数とする．方程式

$$\tan^{-1} x = \frac{ax}{1+x^2}$$

の区間 $(0, \infty)$ における実数解の個数を求めよ．ただし，$\tan^{-1} x$ は x の逆正接関数で，$\tan^{-1} 0 = 0$ とする.

(岐阜大類 23) (固有番号 s232601)

2.18 (1) 次式が成り立つような定数 a の値を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x + a - \sqrt{x^2+x+1}\right) = 1$$

(2) 次の関数を微分せよ.

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

(豊橋技科大類 23) (固有番号 s232705)

2.19 次の関数を微分せよ.

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} \quad (x \neq n\pi,\ n \text{ は整数})$$

(豊橋技科大類 24) (固有番号 s242704)

2.20 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)$ を求めよ.

(名古屋工業大類 24) (固有番号 s242906)

2.21 指示に従って導関数を求めなさい.

(1) $y = \left(e^x + e^{-x}\right)^2$ を x で微分せよ．e は自然対数の底を表す.

(2) $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ を x で微分せよ．a は定数を示す.

(3) $x = \sin t,\ y = \cos 2t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(三重大類 23) (固有番号 s233101)

2.22 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$$

(三重大類 23) (固有番号 s233102)

2.23 関数 $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x+1}$ に対して，次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大類 23) (固有番号 s233202)

2.24 以下の関数を微分せよ．

(1) $y = \cosh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$　　　(2) $y = \tan^{-1} x$

(奈良女子大類 23)　　(固有番号 s233204)

2.25 (1) $y = \{\log(\log x)\}^3$ の一次導関数を求めよ．

(2) $y = \cos 2x$ の二次導関数を求めよ．

(3) $y = \sqrt[3]{x^2-2x+3}$ の一次導関数を求めよ．

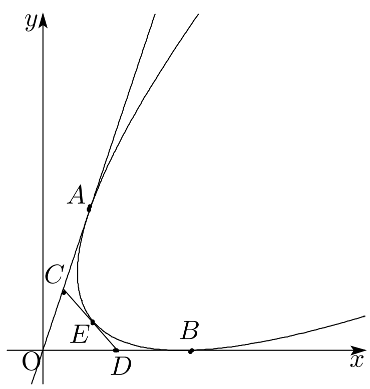
(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233610)

2.26 O を原点とする直交座標上の 2 点 $A(a_x,\ a_y)$ と $B(b_x,\ 0)$ を通る曲線が媒介変数 t を用いて次式のように定義されている．$a_y > 0,\ b_x > 0$ として以下の問に答えよ．

$$x = (1-t)^2 a_x + t^2 b_x$$
$$y = (1-t)^2 a_y$$

(1) この曲線が点 A において直線 $\overline{AO}$ に接することを示せ．

(2) この曲線が線分 $\overline{AO}$ の中点 C と線分 $\overline{BO}$ の中点 D を結ぶ線分の中点 E で接することを示せ．



(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233612)

2.27

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x) > 0$ を示せ．

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x < \tanh(\tan x)$ を証明せよ．

（ただし，任意の実数 t に対して，$\tanh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ である．）

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233807)

2.28 次の問に答えよ．

(1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は定数である．　$\dfrac{1}{\tan(ax)}$

(2) 次の関数の第 n 次導関数を求めよ．ただし，log は自然対数である．　$\log(1+x)$

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$

(鳥取大類 23)　　(固有番号 s233901)

2.29 関数 $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$ の極値を求めよ.

(鳥取大類 23)　　(固有番号 s233905)

2.30 (1) $y = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ のグラフを描け.

(2) 3^π と π^3 はどちらが大きいか, 理由を付けて答えよ.

(岡山大類 23)　　(固有番号 s234001)

2.31 $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が常に $f''(x) > 0$ を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f'(x)$ は狭義単調増加であることを示せ.

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ のとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

(3) $a < b$, $f(a) = a$ かつ $f(b) = b$ であるとする. このとき, $a < x < b$ ならば $f(x) < x$ であることを示せ.

(4) $b > 0$, $f(0) > 0$, $f(b) = b$ かつ $f'(b) > 1$ であるとする. このとき, 方程式 $f(x) = x$ は, $0 < x < b$ の範囲に解をただ一つ持つことを示せ.

(広島大類 23)　　(固有番号 s234101)

2.32 関係式 $y = e^{-x}e^{-y}$ から, $\dfrac{dy}{dx}$ を y のみを用いて表せ.

(広島大類 23)　　(固有番号 s234104)

2.33 $x = 1-2t$, $y = e^{2t}\sin t$ とする.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ と $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ.　　(2) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(広島市立大類 23)　　(固有番号 s234201)

2.34 円 $x^2+y^2=r^2$ の接線と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ P, Q とし, 円と接線の交点を $A(x_0. y_0)$ とする. このとき, 線分 PQ の最小値を求めたい. 以下の問いに答えなさい. ただし, $r > 0$ とし, 交点 A は第 1 象限 $(x_0 > 0,\ y_0 > 0)$ にあるものとする.

(1) 接線の方程式を書きなさい.

(2) 線分 PQ の最小値が $2r$ であることを示しなさい

(山口大類 23)　　(固有番号 s234304)

2.35 関数 $f(x)$, $g(x)$ が条件 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ を満たしているとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2+3}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log(1+x)}$ を求めよ.

(3) $f(x) = x$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ.

(高知大類 23)　　(固有番号 s234501)

2.36 関数 $y=(x^2+1)e^{-x}$ の n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ.

(愛媛大類 23)　　(固有番号 s234603)

2.37 (1) $f(x)=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ とおく．ただし，$\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(a) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.　　(b) $f(2)$ の値を求めよ.

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-4x}}{\sin 5x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{\log x}$　　(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$

(愛媛大類 23)　　(固有番号 s234607)

2.38 次の関数の導関数 dy/dx を求めなさい.

(1) $y=x\sin x$　　(2) $y=(ax+b)^n$

(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　　(4) $y=\log\dfrac{2x}{1+\sin x}$

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234901)

2.39 下式で表される Leibniz の公式を使って，$y=x^3\sin x$ の第 n 次導関数を求めなさい.

$$\text{Leibniz の公式}:\ (uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}u^{(n-1)}v'+\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}u^{(n-2)}v''+\cdots+\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}uv^{(n)}$$

ここで，$(uv)^{(n)}$: 関数 uv の第 n 次導関数，$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234902)

2.40 方程式 $x^3+3px+q=0$ が相異なる 3 実数解をもつための条件を求めよ.

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234905)

2.41 次の関数を微分せよ.

(1) 10^x　　(2) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$　　(3) $\cosh^{-1}x$

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234910)

2.42 $\log_e\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ を x で微分せよ.

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235001)

2.43 関数 $y=\dfrac{x^2}{e^x}$ について，以下の問題に答えよ.

(1) y の 1 次導関数および 2 次導関数を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}y$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y$ を求めよ.

(3) この関数の増減表を作成せよ.

(4) $y=\dfrac{x^2}{e^x}$ のグラフの概形を描け.

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235004)

2.44 以下の問いに答えよ.

(1) $e^{2x}\sin(ax)$ の微分を求めよ．ただし a は定数である.

(2) $x^{\sin x}$ の微分を求めよ.　　(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin x-x}$ を計算せよ.

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235008)

2.45 次の関数を微分しなさい．

$$\cos^{-1}\frac{x}{a}$$

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235407)

2.46 次の微分を求めなさい．

$$\frac{d}{dx}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right) \quad \text{（ただし，対数は自然対数とする．）}$$

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235409)

2.47 関数 $y = a^x$ を x で微分しなさい．ただし，a は正の実数とする．

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235414)

2.48 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$　　(2) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235503)

2.49 次の微分を計算しなさい．

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x - x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{（ただし，}-\frac{\pi}{2} < \sin^{-1}x < \frac{\pi}{2}\text{とする）}$$

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235507)

2.50 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x) = xe^{-x^2}$　　(2) $f(x) = \sin^2 x\,\cos^2 x$

(首都大類 23)　　(固有番号 s235904)

2.51 $y = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の逆関数 $y = \cosh^{-1}x$ について，次の各式を示せ．

(1)

$$y = \cosh^{-1}x = \pm\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

(2) $y > 0$ の $y = \cosh^{-1}x = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ について

$$y' = \frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(滋賀県立大類 23)　　(固有番号 s236001)

3 積分

3.1 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^3\,dx$

(北見工業大類 23)　　(固有番号 s230203)

3.2 $x = \tan t$ と置き換えて，次の定積分を求めよ．

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(秋田大類 23)　　(固有番号 s230403)

3.3 x を実数とし， 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}\cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ とするとき，

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(3) 曲線 $y = f(x)$ $\left(区間\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大類 23)　　(固有番号 s230502)

3.4 次式で決まる曲線で囲まれる面積について考察せよ． 以下の (1) から (3) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい．ただし，x と y は実数とする．

$$y^2 - x^2(x + a) = 0$$

(1) $a = 1$ のときの曲線の概形をグラフに示す．

(2) $a = -1$ のときの曲線の概形をグラフに示す．

(3) $a = 1$ のときの曲線によって囲まれた領域の面積を求める．積分の計算においては $t = \sqrt{x + a}$ とおいて置換積分を行ってよい．

(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230603)

3.5 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 1}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230605)

3.6 極座標表示で表された曲線 ： $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ について，以下の各問に答えよ．

(1) 曲線の長さを求めよ．

(2) 曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ．

(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230606)

3.7 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty e^{-x}|\sin x|\,dx$$

必要があれば次の公式を用いてもよい．

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C \quad (C\ は積分定数)$$

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231302)

3.8 次の不定積分を求めよ．

$$\int \left(2x^2\tan^{-1}2x\right)dx$$

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231402)

3.9 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^3-1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$$

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232004)

3.10 以下の計算をせよ.

(1) $(xe^x \sin x)'$　　(2) $\displaystyle\int xe^x \sin x dx$

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232007)

3.11 次の 3 つの関数のそれぞれの不定積分を求めよ.

(1) $f(x) = 2x - 1$　　(2) $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$　　(3) $h(x) = (2x-1)^2$

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232014)

3.12 次の問に答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$ とおくとき，広義積分 I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) I_n の値を求めよ.

(金沢大類 23)　　(固有番号 s232206)

3.13 不定積分を求めよ.

$$\int x \sin x\, dx$$

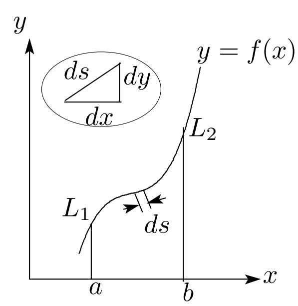
(福井大類 23)　　(固有番号 s232403)

3.14 次の各問にしたがって，半径 R の円の円周の長さを求めよ.

(1) 右の図のように，関数 $f(x)$ の L_1 から L_2 の長さは $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds$ で求めることができる.

$$\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

となることを導け.



(2) 点 (x, y) と x 軸との間の角度を θ とすると，x および y を θ の関数で表せ．また，dy/dx を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ の積分の式を用いて，半径 R の円の円周の長さが $2\pi R$ となることを示せ．ただし，計算の途中過程も必ず示すこと.

(福井大類 23)　　(固有番号 s232404)

3.15 次の関数の不定積分を求めよ

(1) $x(2x-3)^2$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　　(3) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$　　(4) $e^x \cos x$

(福井大類 23)　　(固有番号 s232415)

3.16 曲線 $\boldsymbol{A}: y=\sin 2x$ と曲線 $\boldsymbol{B}: y=a\sin x$ がある．

$0<a<2$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で以下の問いに答えよ．

(1) 右の枠内に曲線 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の概形を描け．

(2) 曲線 $\boldsymbol{A}$ と x 軸で囲まれた面積を求めよ．

(3) 曲線 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で囲まれる面積が，(2) で求めた面積の 2 分の 1 のときの定数 a を求めよ．

(福井大類 23)　　(固有番号 s232416)

3.17 定数 a, r が $0<r \leq a$ のとき，円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ を，x 軸の周りに一回転してできる立体の体積を求めよ．

(福井大類 23)　　(固有番号 s232417)

3.18 (1) 次の不定積分を解け．

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

(2) $x=2(\theta-\sin\theta)$, $y=1-2\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について以下の問いに答えよ．

(a) $y \geqq 0$ となる θ の範囲を求めよ．

(b) $y \geqq 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(豊橋技科大類 23)　　(固有番号 s232706)

3.19 以下の問いに答えよ．

(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{2x-9}{(x-2)(x+3)}\,dx$$

(2) 楕円 $9x^2+4y^2-18x-27=0$ の $x \geq 0$, $y \geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれた領域の面積 S を求めたい．以下の問いに答えなさい．

(a) 領域における x の最大値を答えよ．

(b) 面積 S を定積分を含む式で表せ．

(c) 面積 S を計算せよ．

(豊橋技科大類 24)　　(固有番号 s242705)

3.20 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \, \cos nx \, dx$ （m, n は負でない整数）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ （ヒント：$x=\tan\theta$とおけ．また，$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$ である．）

(名古屋大類 23)　　(固有番号 s232803)

3.21 次の積分の値を求めよ．

$$I_1=\int_0^1 \left(\sin^{-1} x\right)^2 \, dx$$

(名古屋工業大類 23)　　(固有番号 s232904)

3.22 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin x}\,dx$ を計算せよ．

(名古屋工業大類 23)　　(固有番号 s232907)

3.23 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx$$

(名古屋工業大類 24)　　(固有番号 s242904)

3.24 定積分の値を求めよ．自然対数は log で表す.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2 - 1}{x}\, dx$

(三重大類 23)　　(固有番号 s233103)

3.25 次の定積分を求めなさい.

$$\int_1^4 \frac{2x + 7}{x^2 + 7x + 10}\, dx$$

(三重大類 23)　　(固有番号 s233111)

3.26 xy-平面上の曲線

$$C\ :\ y = \log x\ \ (x > 0)$$

と，原点を通り C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ.

(1) 曲線 C と直線 ℓ の接点の座標を求めよ.

(2) 曲線 C，直線 ℓ および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(奈良女子大類 23)　　(固有番号 s233203)

3.27 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-ax} dx \quad (a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha} \log x\, dx \quad (\alpha > -1)$

(奈良女子大類 23)　　(固有番号 s233205)

3.28 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 + \frac{3}{x}\right)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \log\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大類 23)　　(固有番号 s233402)

3.29 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式が任意の実数 t に対して成立することを示せ.

$$\int_0^t (s^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} ds = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} (s^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} ds$ の値を求めよ.

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233601)

3.30 次の不定積分を求めよ．ただし，log は自然対数である.

(1) $\displaystyle\int x \log x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1 - x^3}\, dx$

(鳥取大類 23)　　(固有番号 s233903)

3.31 不定積分 $\displaystyle\int e^x \sin x dx$ を求めよ.

(鳥取大類 23)　　(固有番号 s233906)

3.32 次の問に答えよ.

(1) サイクロイド：$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 曲線 $y = 2x^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転したときに得られる立体の体積を求めよ.

(鳥取大類 23)　　(固有番号 s233904)

3.33 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(2) 自然数 n に対して，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(3) $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が有界ならば，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x}\,dx$ は収束することを証明せよ.

(岡山大類 23)　　(固有番号 s234002)

3.34 以下の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{r\sqrt{\log r}}\,dr$ の値を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{r(\log r)^2}\,dr$ の値を求めよ.

(広島大類 24)　　(固有番号 s244105)

3.35 $\alpha > 1$ とする．広義積分 $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $x^{1-\alpha}\log x$ を微分せよ.

(2) $R > 1$ とする．$\displaystyle\int_1^R \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ.

(3) I_α を求めよ.

(徳島大類 23)　　(固有番号 s234402)

3.36 関数 $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)^3}$ について．以下に設問に答えよ.

(1) 恒等式 $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2} + \dfrac{D}{(x-2)^3}$ が成り立つ様に定数 A, B, C, D の値を求めよ.

(2) $f(x)$ の原始関数で，$x = \dfrac{3}{2}$ の時の値が 0 となるものを求めよ.

(高知大類 23)　　(固有番号 s234506)

3.37 a, b は実数で，$0 < a < 1$ を満たすとする．xy 平面において，２つの関数のグラフ

$$C : y = \log x\ , \quad l : y = ax + b$$

がただ一つの共有点を持ったとき，次の問に答えよ.

(1) b を a を用いて表せ.

(2) $b > 0$ となるような a の範囲を求めよ.

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，曲線 C，および 3 直線 l，$x = 0$，$y = 0$ で囲まれた部分の面積を求め，a のみを用いて表せ.

(愛媛大類 23)　　(固有番号 s234606)

3.38 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{2x} \cos x \, dx$$

(2) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ とおいて，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \cos x} \, dx$$

(愛媛大類 23)　　(固有番号 s234608)

3.39 次の曲線と直線とで囲まれた図形の面積を求めなさい．

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 5 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

(山口大類 23)　　(固有番号 s234303)

3.40 次の各問いに答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$ を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x-2|}}$ は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ．

(九州大類 23)　　(固有番号 s234701)

3.41 アステロイド C : $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ に対し，各問いに答えよ．

(1) 曲線 C 上の点 (x, y) に対し，$x = \cos^3 t$ のとき，y を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C の囲む領域の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C の長さ L を求めよ．

(九州大類 23)　　(固有番号 s234702)

3.42 次の不定積分または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int x \sec^2 x dx$　$(\sec^2 x = 1/\cos^2 x)$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{7/2} dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x) \, dx$

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234903)

3.43 $\displaystyle\int 2x \sin x \, \cos x \, dx$ を求めよ．

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234906)

3.44 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2 - x - 2} \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$　　ただし，$a > 0$ とする．

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234907)

3.45 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \left(\frac{3x+5}{x^2+4x+3}\right) dx$　　(2) $\displaystyle\int \left(x^3 e^{-x^2}\right) dx$　　(3) $\displaystyle\int (\sin 2x \, \cos 3x) \, dx$

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234911)

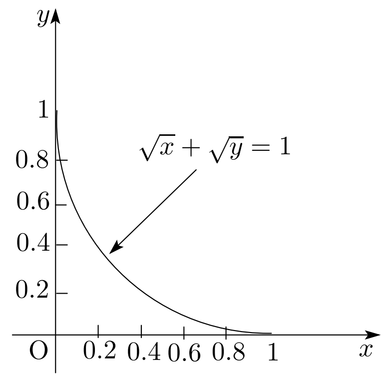
3.46 $\sinh(1-2x)$ を不定積分せよ.

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235002)

3.47 右図に示すような曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ について,
以下の問題に答えよ.

(1) この曲線と直線 $x=0,\ y=0$ で
囲まれる部分の面積を求めよ.

(2) この曲線を x 軸のまわりに回転して
出来る回転体の体積を求めよ.



(長崎大類 23)　　(固有番号 s235005)

3.48 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235010)

3.49 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$$

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235019)

3.50 次の不定積分を求めよ.

$$\int (2x-3)^{10}dx$$

(大分大類 23)　　(固有番号 s235101)

3.51 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$　　(1) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

(大分大類 23)　　(固有番号 s235104)

3.52 関数 $f(x)=e^{-x}\sin x \quad (x \geqq 0)$ において, 次の問に答えなさい.

(1) a と b を実数とし, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めなさい.

(2) n を自然数とし, 区間 $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(3) $f(x)$ の極大値を与える x を小さい順に $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ とするとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ の値を求めなさい.

(熊本大類 23)　　(固有番号 s235202)

3.53 以下の問に答えよ．

(1) x の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，以下の部分積分法の公式
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$
が成り立つことを示せ．

(2) 上記の公式を利用して，不定積分 $\int \log x\,dx$ を求めよ．

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とする．このとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ であることを示せ．

(4) 前問の結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ を求めよ．

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235401)

3.54 次の不定積分を求めなさい．
$$\int x(x-2)^9 dx$$

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235410)

3.55 曲線：$y = 2x^2$ と，その曲線上の点 $P(1,2)$ での接線と，x 軸によって囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235413)

3.56 次の不定積分を計算せよ．
$$\int \frac{1}{x^2-3x-10}\,dx$$

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235506)

3.57 置換積分法を用いて，関数 $f(x) = x^3\sqrt{1+x^2}$ の不定積分 $\int f(x)dx$ を求めなさい．

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235513)

3.58 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\int \sin^2 x\,dx$　　(2) $\int \sin^3 x\,dx$　　(3) $\int e^x \sin x\,dx$

(香川大類 23)　　(固有番号 s235701)

3.59 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$　　(2) $\int e^x \sin x\,dx$

(首都大類 23)　　(固有番号 s235907)

3.60 曲線 $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$　$(0 \leq x \leq 1)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この曲線と 2 つの直線 $x = 1$，$y = 0$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(2) この曲線の長さを求めよ．

(はこだて未来大類 23)　　(固有番号 s236304)

3.61 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2+x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\cos^2 x\,dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大類 23)　　(固有番号 s236403)

微分積分 II

4 級数

4.1 関数 $f(x) = e^x$ の原点におけるテーラー展開の式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + R_4$$

について以下の設問 (1),(2) に答えよ．ただし，a_0，a_1，a_2，a_3 は定数で，R_4 は剰余項である．

(1) 定数 a_0，a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) 設問 (1) の結果を用いて，このテーラー展開の式から e の値の範囲を求めよ．ただし，$|R_4| < \dfrac{1}{6}$ を用いてよい．

(秋田大類 23)　　(固有番号 s230404)

4.2 無限級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

が収束するかどうか判定せよ．

(東北大類 23)　　(固有番号 s230506)

4.3 関数 $f(x) = \sin 2x$ の $x = \pi/2$ におけるテイラー展開について以下の問いに答えよ．

(1) $(x - \pi/2)^4$ の項までテイラー展開を求めよ．ただし，ここでは剰余項は求めなくてよい．

(2) $\pi/2 < x < \pi$ を満たす範囲の x に対して，剰余項 R_5 は $|R_5| < \dfrac{\pi^5}{5!}$ を満たすことを示せ．

ただし，(1),(2) において $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開は，正の整数 n に対して

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_{n+1}$$

と表される．ここで，剰余項 R_{n+1} は，$a < p < x$ である p が存在して，

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(p)(x-a)^{n+1}$$

と表される．

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231314)

4.4 $-1 < a < 1$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx}$ $(x \in R)$ は R 上一様に絶対収束することを示せ．ただし，i は虚数単位を表す．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$ $(x \in R)$ の和を求めよ．

(富山大類 23)　　(固有番号 s232303)

4.5 (1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$ を求めよ．

(2) $f(x) = \dfrac{-4x + 6}{x^2 - 4x + 3}$ のマクローリン展開を求めよ．

(静岡大類 23)　　(固有番号 s232501)

4.6 $\alpha > 0$ とする．$x \geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は,

$$x \in [n, n+1) \text{ において} \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする．ただし，n は自然数とする．このとき

$$\int_1^{N+1} f_\alpha(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ.

(1) $\alpha > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束することを示せ.

(2) $\alpha \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が発散することを示せ.

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231410)

4.7 関数 $f(x) = \log(1 + \sin x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(山梨大類 23)　　(固有番号 s231805)

4.8 関数 $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，求めた無限級数の収束性については議論しなくてよい.

(金沢大類 23)　　(固有番号 s232209)

4.9 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 4}$ を求めよ。

(名古屋工業大類 23)　　(固有番号 s232906)

4.10 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す.

$$a_1 = 2\,, \quad a_2 = 6\,, \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$$

(1) 第 n 項が $b_n = a_{n+1} - a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(3) 次の式で定義される和 S_n を求めよ.

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{a_m}$$

(4) $n \to \infty$ における S_n の極限値を求めよ.

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233501)

4.11 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数からなる数列で，不等式

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するものとする．この時，以下の問いに答えよ.

(1) 全ての自然数 n について $a_n \leq \dfrac{a_1}{n^2}$ となることを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ.

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233803)

4.12 (1) $\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(2) $\log(1-x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(3) (1) と (2) を用いて, $\log\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(4) a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{a}{\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ.

(広島大類 23) (固有番号 s234105)

4.13 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大類 24) (固有番号 s244102)

4.14 べき級数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の項別微分を求めよ.

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ は収束することを示せ.

(3) $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ で収束することを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(高知大類 23) (固有番号 s234502)

4.15 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の第 2 階導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ をマクローリン展開し，2 次の項まで求めよ.

(長崎大類 23) (固有番号 s235009)

4.16 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．ただし，n は正の整数とする.

(鹿児島大類 23) (固有番号 s235415)

4.17 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ （ただし，$x<1$）の x^3 までのマクローリン展開を求めなさい.

(室蘭工業大類 23) (固有番号 s235512)

4.18 関数 $f(x)=e^x$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $x=0$ におけるテイラー展開を x^2 の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $e^{0.03}$ の近似値を求めなさい.

(首都大類 23) (固有番号 s235906)

4.19 2^x を x^3 の項までマクローリン展開せよ．

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235003)

4.20 $x_n = r^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ について，以下の問いに答えよ． ただし，$0 < |r| < 1$ とする．

(1) 第 N 項までの和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n$ を求めよ．

(2) (1) で求めた和について，$N \to \infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ を求めよ．

(3) 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nx_n$ を求めよ．

(4) (3) で求めた和について，$N \to \infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx_n$ を求めよ．

ただし，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} Nr^N = 0 \ (|r| < 1)$ であることを用いてよい．

(はこだて未来大類 23)　　(固有番号 s236305)

5 偏微分

5.1 関数 $z = x\sin(x + 2y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大類 23)　　(固有番号 s230202)

5.2 $\mathbb{R}^2$ 上の関数が点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ で（全）微分可能であることの定義を述べよ．また，$f(x, y) = |x||y|$ の微分可能性を $\mathbb{R}^2$ の各点について調べ，微分可能ならばその点での偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230609)

5.3 関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + \log(x^2 + y^2 + 2xy + 1)$$

の極値を求めよ．

(東京工業大類 23)　　(固有番号 s230803)

5.4 次の 2 変数関数の極値を求めなさい．

$$f(x, y) = x^3 - xy^2 - x^2 + y^2$$

ただし，極小値であるか極大値であるかを明記し，そのときの点 (x, y) も書きなさい．

(東京農工大類 23)　　(固有番号 s230902)

5.5 つぎで定義される関数 $f(x, y)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x, y) = x^3 + 3axy + y^3 \qquad (a \text{ は定数})$$

(1) $a \neq 0$ のとき，$f(x, y)$ の極値を求めよ．

(2) $a = -1$ のとき，方程式 $f(x, y) = 0$ で与えられる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ．

(電気通信大類 23)　　(固有番号 s231003)

5.6 関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + 3y^2 + 3$ の極値を求めなさい．

(山梨大類 23)　　(固有番号 s231806)

5.7 以下の問いに答えよ.

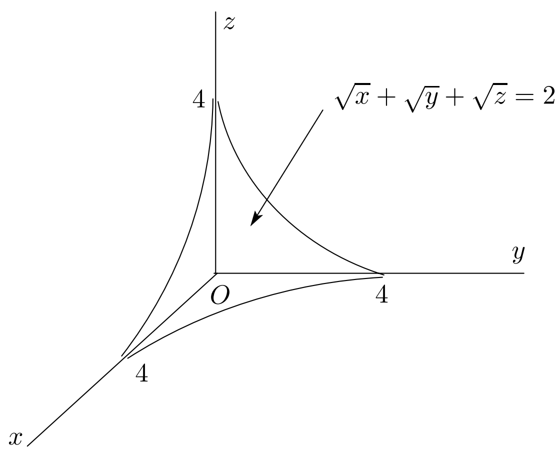
(1) 2次関数 $F(u,v)=au^2+2buv+cv^2+du+ev+f$ は, $a>0$ かつ $ac-b^2>0$ のときただ1つの点で最小値をとることを示せ.

(2) 空間の2直線 $l_1=\{\boldsymbol{x}_1+u\boldsymbol{a}_1 \mid u\in R\}$, $l_2=\{\boldsymbol{x}_2+v\boldsymbol{a}_2 \mid v\in R\}$ 上の点の間の距離の2乗 $G(u,v)=|(\boldsymbol{x}_1+u\boldsymbol{a}_1)-(\boldsymbol{x}_2+v\boldsymbol{a}_2)|^2$ を (1) の $F(u,v)$ のように表示したとき, a,b,c,d,e,f を求めよ. ただし $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{a}_2$ は定ベクトルとする.

(3) (2) において, 2直線 l_1, l_2 が平行でないとき, 2直線上の点の間の距離が最小になる点の組がただ1組あることを示せ.

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231321)

5.8 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ の接平面が x 軸 y 軸, z 軸と交わる点を A,B,C とし, 原点 O から点 A,B,C への距離を OA, OB, OC とする. このとき, $OA+OB+OC$ の値は接平面によらず一定であることを証明しなさい.



(筑波大類 23)　　(固有番号 s231308)

5.9 (1) 次の関数を微分せよ.

$$y=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$$

(2) 次の関数について $\dfrac{dz}{dt}$ を t の関数で表せ.

$$z=x^2+2y\,,\quad x=\sin t\,,\quad y=5\cos t$$

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231401)

5.10 xy 平面上で定義された関数 $f=f(x,y)$ は, 正値で2階微分可能であり,

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\qquad\cdots\cdots\quad(*)$$

を満たすものとする. また, $g(x,y)=\log f(x,y)$ とおく.

(1) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}$ が満たす式を, f を用いずに表せ.

(2) $\phi(x)\psi(y)$ の形の関数を変数分離型関数とよぶ, ϕ と ψ が正値で2階微分可能な関数であるならば, $f(x,y)=\phi(x)\psi(y)$ は, 上の条件 $(*)$ を満たすことを示せ.

(3) 上の条件 $(*)$ を満たす関数 f は, 変数分離型の関数であることを示せ.

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231409)

5.11 以下の 2 変数関数の 1 階偏導関数，2 階偏導関数をすべて求めよ.

$$f(x,y)=x^{\frac{1}{y}}$$

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232005)

5.12 (1) $x=4-x^2-y^2$ 上の点 $(a,b,4-a^2-b^2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた接平面が点 $(1,2,4)$ を通るとき，接点の軌跡を x - y 平面上に投影してできる図形を求めよ.

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232008)

5.13 $z=\arctan\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ のとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ となることを示せ.

(福井大類 23)　　(固有番号 s232405)

5.14 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+3(y^2-2y)x$ の極値を求めよ.

(静岡大類 23)　　(固有番号 s232506)

5.15 $f(x,y)$ を原点で偏微分可能な関数とする．このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-h,0)-f(0,2h)}{h}$$

の値を偏微分係数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ を用いて表せ.

(岐阜大類 23)　　(固有番号 s232605)

5.16 $f(x,y)=x^3+2xy^2-6x$ とする.

(1) 方程式 $f(x,y)=0$ の表す平面曲線はどのような図形か答えよ.

(2) 2 変数関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大類 23)　　(固有番号 s232903)

5.17 2 変数関数 $f(x,y)=x^3-y^3-xy$ について，問 (1) と (2) に答えよ.

(1) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) を求めよ.

(2) (1) で求めた点において極値の判定をせよ.

(名古屋工業大類 24)　　(固有番号 s242903)

5.18 次の関数の 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ および 2 階偏導関数数 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ を求めなさい.

$$f(x,y)=e^{xy^3}$$

(三重大類 23)　　(固有番号 s233112)

5.19 関数 $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$ について次の問いに答えよ.

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(1,2,2)$ における接平面を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大類 23)　　(固有番号 s233403)

5.20 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)=(x+\cos y)e^{-x}$ の極値を全て求め，極大・極小を判定せよ.

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233804)

5.21 関数 $X(r,\theta)=r\cos\theta$, $Y(r,\theta)=r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D=(0,\infty)\times(-\pi,\pi)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) ２つの集合

$$A=\big\{\big(X(r,\theta_0),Y(r,\theta_0)\big)\,|\,r\in(0,\infty)\big\},\ B=\big\{\big(X(r_0,\theta),Y(r_0,\theta)\big)\,|\,\theta\in(-\pi,\pi)\big\}$$

を１つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0\in(-\pi,\pi)$, $r_0\in(0,\infty)$ は定数である．

(2) 行列 $J(r,\theta)=\begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta)\end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし，

$$X_r=\frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r=\frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta=\frac{\partial X}{\partial \theta},\ Y_\theta=\frac{\partial X}{\partial \theta}$$

である．

(3) ２つのベクトル $\big(X_r(r,\theta),Y_r(r,\theta)\big)$, $\big(X_\theta(r,\theta),Y_\theta(r,\theta)\big)$ が直交することを示せ．

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233602)

5.22 次の問に答えよ．

(1) 陰関数 $f(x,y)=x^4-4xy+y^4=0$ において，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) 次の関数の極値を求めよ．また，それは極大値か極小値か答えよ．

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2-6x-3y+9$$

(鳥取大類 23)　　(固有番号 s233902)

5.23 関数 $u(x,y)=e^{-cx-y}$（c は定数）に対して，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ．

(広島大類 23)　　(固有番号 s234102)

5.24 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ とする．

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ において，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $(x,y)\neq(0,0)$ において，$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$ 方向の微分係数（方向微分係数）を求めよ．

(3) $(x,y)=(0,0)$ において，z が全微分可能でないことを示せ．

(広島市立大類 23)　　(固有番号 s234202)

5.25 関数 $f(x,y)=xy(1-x-y)$ に対して $f_x=f_y=0$ となる (x,y) をすべて求めよ．また f の極値を求めよ．

(愛媛大類 23)　　(固有番号 s234604)

5.26 2 変数関数 $f(x,y)=\cos(x^2y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を，それぞれ求めよ．

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234912)

5.27 関数 $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)\quad(0\leqq x<2\pi,\ 0\leqq y<2\pi)$ の極値を求めよ．求める過程も記述すること．

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235015)

5.28 $f(x,y)=x^3+3x^2+4xy+2y^2+4x+4y$ の極値を求めよ．

(東京海洋大類 23)　　(固有番号 s236404)

5.29 二変数関数 $f(x,y)$ は 2 回偏微分可能であり，$(x,y)=(a,b)$ において $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ を満たしている．また，一変数関数 $g(z)$ は 2 回微分可能であるとする．$F(x,y)=g\left(f(x,y)\right)$ とおくとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ と $g'\left(f(x,y)\right)$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0$ を示せ．

(3) さらに，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)=0$ を仮定するとき，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b)+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b)=0$ を示せ．

(愛媛大類 23)　　(固有番号 s234609)

5.30 実数 $x,\ y$ の 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$ について，次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となる $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極値があれば，それらをすべて求めよ．

(宮崎大類 23)　　(固有番号 s235303)

6 重積分

6.1 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ を求めよ．

$\left(\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \right.$ とおくとよい．$\left.\right)$

(北見工業大類 23)　　(固有番号 s230205)

6.2 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 2y\right\}$ とするとき，次の重積分について以下の問いに答えなさい．

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) x , y を極座標変換したとき，領域 D が移る領域 G を求め，図示しなさい．

(3) (1) および (2) の結果を用いて，重積分 I を求めなさい．

(岩手大類 23)　　(固有番号 s230303)

6.3 重積分

$$I=\int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(東北大類 23)　　(固有番号 s230507)

6.4 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x^2+y^2\le 1\right\}$ とするとき，D 上の連続関数 f の積分値

$$I(f)=\int_D f(x,y)\,dxdy$$

がどのように定義されるか述べよ．また，f が任意の $(x,y)\in D$ に対して $f(x,y)=-f(-x,-y)$ を満たすとき，$I(f)=0$ であることを定義に従って示せ．

(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230601)

6.5　球 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leq x$ との共通部分の体積 V を求めよ.

(東京工業大類 23)　　(固有番号 s230804)

6.6　領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}\ ,\ 0 \leqq x \leqq \sin y\right\}$ における次の重積分 A および B の値を求めなさい.

$$A=\iint_D \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdy\ ,\qquad B=\iint_D \sqrt{1-x^2}\,dxdy$$

(東京農工大類 23)　　(固有番号 s230903)

6.7　次の重積分について，以下の問いに答えよ.

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4}\qquad (D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1)$$

(1) $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ とおくとき，x,y の u,v に関するヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) I の値を求めよ.

(電気通信大類 23)　　(固有番号 s231004)

6.8　三次元空間 $O-xyz$ 座標系で，曲面 $z=e^{-(x^2+y^2)}$ と平面 $z=a^{-1}$ $(1<a)$ で囲まれた図形を図示し，その体積 V を求めなさい.

(千葉大類 23)　　(固有番号 s231203)

6.9　次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\log_e(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 5,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231309)

6.10　領域 D を $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2 \leqq y \leqq 4x+5\,,\ -1 \leqq x \leqq 1\right\}$ とする．D を図示し，重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$ を求めよ.

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231315)

6.11　a,b は正の定数とし，D を

$$D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

で定めるとき，積分

$$\iint_D |(ax+by)(-bx+ay)|e^{-(ax+by)^2}dxdy$$

を次のようにして求めよ.

(1) 次の変数変換のヤコビアンを計算せよ.

$$\begin{cases} u=ax+by, \\ v=-bx+ay \end{cases}$$

(2) 上の変数変換を用いて積分を計算せよ.

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231322)

6.12　次の二重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xydxdy\ ,\quad (\ D=\{\ (x,y)\,|\,x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+3y \leq 6\ \}\ )$$

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231403)

6.13 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ について．以下の各問に答えよ．

(1) すべての $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し，等式

$$f(x,y) = (\alpha x - y)(\beta x + y)$$

が成り立つように正定数 $\alpha,\ \beta$ を定めよ．

また $f(x,y) = 0,\ f(x,y) = 1$ の軌跡の概形を xy-直交座標平面にそれぞれ図示せよ．

(2) 点 (x,y) が原点を中心とする単位円周上を動くとき，関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ を中心とする単位閉円盤を D とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy = f(a,b)$$

(茨城大類 23)　　(固有番号 s231702)

6.14 xy-直交座標平面において $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqq 1$ と $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ とを満たす領域を D とする．二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ の値を求めよ．

(茨城大類 24)　　(固有番号 s241702)

6.15 2変数関数 $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int g(x,1)dx$ を求めなさい．

(2) 領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき，二重積分

$$\iint_D g(x,y)dxdy$$

の値を求めなさい．

(3) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ を満たす点 (x,y) を求めなさい．

(4) 上記の領域 D での $g(x,y)$ の最大値を求めなさい．

(山梨大類 23)　　(固有番号 s231802)

6.16 領域 $D = \{(x,y) \mid x - y \leqq 1,\ x + y \leqq 1,\ x \geqq 0\}$ に対し，2重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+2)^2}dxdy$ を求めなさい．

(山梨大類 23)　　(固有番号 s231807)

6.17 関数 $f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) $D_a = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2 \leqq x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ とする．

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

を求めよ．

(金沢大類 23)　　(固有番号 s232203)

6.18 xyz-空間内の二つの曲面 $x^2 + y^2 - x = 0$ と $z^2 = x$ で囲まれた部分の体積を求めよ．

(金沢大類 23)　　(固有番号 s232208)

6.19 累次積分 $\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{2-x} xy dy \right\} dx$ の積分順序を変更して，積分の値を求めよ． また積分領域も図示せよ．

(福井大類 23)　　(固有番号 s232406)

6.20 次の 2 重積分を求めよ．また，積分領域 D を図示せよ．

(1) $\iint_D xe^y \, dxdy$,　$D = \{(x, y) \,|\, x^2 \leqq y \leqq x\}$

(2) $\iint_D \frac{y}{x} \, dxdy$,　$D = \{(x, y) \,|\, 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2, \ 0 \leqq y \leqq x\}$

(静岡大類 23)　　(固有番号 s232502)

6.21 重積分

$$I = \iint_D x \log(x^2 + y^2) \, dxdy \ , \qquad D : x \geqq 0, \ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$$

の値を求めよ．ただし，log は自然対数を表す．

(岐阜大類 23)　　(固有番号 s232602)

6.22 $F(x)$ はすべての x において 2 回微分可能な関数で，$F'(x) = f(x)$ とする． このとき置換微分法により

$$I = \int_a^b xf(x^2)dx$$

の値を F を用いて表せ．ただし，a, b は正の定数とする．また，重積分

$$J = \iint_D \frac{xyf(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \, dxdy \ , \quad D \ : \ x, y \geqq 0, \ p^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq q^2$$

の値を F を用いて表せ．ただし，p, q は正の定数とする．

(岐阜大類 23)　　(固有番号 s232606)

6.23 次の積分の値を求めよ．

$$I_2 = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} \, dxdy \ , \quad D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1 \ , \ \ x + y \geqq 0\right\}$$

(名古屋工業大類 23)　　(固有番号 s232905)

6.24 次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \log(x + y)dxdy \ , \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1, \ 1 \leqq y \leqq 2\}$$

(名古屋工業大類 24)　　(固有番号 s242905)

6.25 xy 平面上の領域 $D = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq x, \ 0 \leqq y, \ x^2 + y^2 \leqq 1\}$ で関数 $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ を考える．

(1) 領域 D における関数 $f(x, y)$ の最大値と最大値をとる点 $(x_0, \ y_0)$ を求めよ．

(2) 領域 D での積分 $I = \iint_D f(x, y)dxdy$ の値を求めよ．

(三重大類 23)　　(固有番号 s233108)

6.26 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_R xy \, dxdy \quad (\, R \ : \ x^2 + y^2 \leqq 9 \text{ かつ } x \geqq 0 \,)$$

(三重大類 23)　　(固有番号 s233113)

6.27 曲線 $y = f(x)$, x 軸, 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域の重心 $(\overline{x}, \overline{y})$ を考える．ただし，区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ とする．

(1) 上記の領域を D とするとき，$\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x dx dy}{\displaystyle\iint_D dx dy}$$

で定義される．

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x) dx}{\displaystyle\int_a^b f(x) dx}$$

となることを証明せよ．

(2) 同様の形式で $\overline{y}$ を求めよ．

(3) $f(x) = \exp(-x/3)$ で区間が $[0, 1]$ となるときの重心 $(\overline{x}, \overline{y})$ を求めよ．ただし，exp は指数関数を表すものとする．

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233505)

6.28 次の積分 (1),(2) の値を求めよ．ただし，集合 D, E を正の実定数 R, a, b, c により

$$D = \left\{(x, y) \in R^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}, \quad E = \left\{(x, y, z) \in R^3 \,|\, ax^2 + by^2 + cz^2 \leq 1\right\}$$

と定める．

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx dy$　　(2) $\displaystyle\iiint_E dx dy dz$

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233603)

6.29 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x + y)^2 \sin(\pi |x - y|) dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x + y| \leq 1,\ |x - y| \leq 1\}$.

(2) $\displaystyle\iint_D \log(1 + x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x + y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233806)

6.30 重積分

$$V = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy . \quad D = \{(x, y) \in R^2 \,|\, 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\}$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) D が変数変換 $x = u$, $y = uv$ によってどのような領域に写されるかを図示せよ．

(2) (1) の変数変換に対するヤコビアンを求めよ．

(3) V の値を求めよ．

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233808)

6.31 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D xy(x - y) dx dy , \quad D : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$$

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235011)

6.32 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y}\,dxdy$ を求めよ.

(広島大類 23)　　(固有番号 s234103)

6.33 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,dxdy$$

ただし, 積分領域 D を次で定める.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > e^2\}$$

(2) 関数

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2} + \left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ が収束することを示せ. ただし. 積分領域 E を次で定める.

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$$

(広島大類 24)　　(固有番号 s244106)

6.34 3 次元ユークリッド空間の三つの点 $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(3,0,4)$ について以下の問に答えよ.

(1) 点 $(x,y,0)$ で xy 平面に垂直に交わる直線を l とする. ただし, $x^2+y^2 \leq 9$ である. 線分 OB を z 軸に関して 360 度回転させたときに線分 OB が描く曲面と直線 l の交点を (x,y,z) と表す. このとき, z を x,y の関数で表せ.

(2) 問 (1) で求めた関数を $f(x,y)$ とおく. 三角形 OAB を z 軸に関して 360 度回転させたときに三角形 OAB が描く立体の体積 V は,

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

と書くことができる. ただし, $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 9\}$ である. この 2 重積分を計算することにより, V の値を求めよ.

(広島市立大類 23)　　(固有番号 s234203)

6.35 $D = \{(x,y);\, 1 \leqq x+y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とする. 二重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\,dxdy$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $u = x-y$, $v = x+y$ とおく. x, y を u, v で表せ.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (1) の変換で D に対応する uv 平面の集合を D' とする. D' を図示せよ.

(4) I を求めよ.

(徳島大類 23)　　(固有番号 s234403)

6.36 以下の問に答えよ.

(1) 次の累次積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{2y}{\pi}}^{1} \cos \frac{y}{x} dx \right) dy$$

(2) $D = \{(x, y) \,:\, x, y \geq 0,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dxdy$$

(愛媛大類 23)　　(固有番号 s234605)

6.37 $D = \{(x, y)\,;\, 0 \leqq x + y \leqq 1,\ 0 \leqq x - y \leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x\, dxdy$$

(愛媛大類 23)　　(固有番号 s234610)

6.38 図 1 に示す三角形の面密度が $\rho(x, y) = \dfrac{y}{x+1}$ で与えられるとき，この三角形の質量 M と重心の座標 $(g_x,\, g_y)$ を求めよ．ただし，重心の座標は，三角形の領域を S としたとき，

$$g_x = \frac{\displaystyle\iint_S x\rho(x, y)\, dx}{M}, \quad g_y = \frac{\displaystyle\iint_S y\rho(x, y)\, dx}{M}$$ で与えられる.

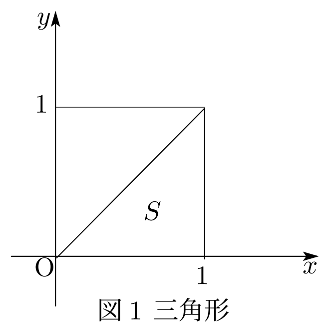


図 1 三角形

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234913)

6.39 重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\, dxdy\,, \quad D = \{(x, y)\,|\, x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大類 23)　　(固有番号 s235304)

6.40 (1) $x^2 + y^2 \leqq 2$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2}\, dxdy$ の値を求めよ.

(滋賀県立大類 23)　　(固有番号 s236004)

6.41 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x + y) dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid y^2 \leqq x \leqq y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(x^2 + y^2) dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\}$

(東京海洋大類 23)　　(固有番号 s236405)

7　微分方程式

7.1　次の連立微分方程式の一般解を求めよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

$$x\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(北海道大類 23)　　(固有番号 s230101)

7.2　$a^2 + b^2 = 5$, $a > 0$, $b < 0$ であるとき，　次の微分方程式について以下の問いに答えなさい.

$$(axy - e^x \cos y)\ dy = \left(e^x \sin y + by^2\right)\ dx$$

(1)　この微分方程式が完全微分方程式であるときの a および b の値を求めなさい.

(2)　(1) の結果を用いて，この微分方程式を解きなさい.

(岩手大類 23)　　(固有番号 s230304)

7.3　以下の問いに答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1)　微分方程式

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 \qquad (*)$$

は，特殊解 $y_1(x)$ 持つことがわかっているとする.

(a)　式 $(*)$ の一般解を $y = y_1(x) + 1/u(x)$ とおき，$u(x)$ に関する微分方程式を $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $y_1(x)$ を用いて表せ.

(b)　$y' = (x^2 + x + 1) - (2x + 1)y + y^2$ は，特殊解 $y_1(x) = x$ を持つことがわかっている．一般解を求めよ．(a) で求めた結果を用いてもよい.

(2)　微分方程式

$$\alpha y'' + y' + y = 0 \qquad y(x = 0) = 1,\ \ y'(x = 0) = 2 \qquad (**)$$

を考える.

(a)　$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ を一般解とする．λ_1, λ_2, C_1, C_2 をそれぞれ α で表せ．ただし，e は自然対数の底とする.

(b)　$x \geqq 0$ において，式 $(**)$ の解を

$$y' + y = 0 \qquad y(x = 0) = \beta$$

の解で近似することを考える．α が十分小さい場合，β をどのように選べば近似できるか，(a) で求めた λ_1, λ_2, C_1, C_2 を用いて説明せよ.

(東京大類 23)　　(固有番号 s230701)

7.4　次の微分方程式を解け.

(1)　$x^2\dfrac{dy}{dx} = y^2 + xy - x^2$　　　　(2)　$\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x$

(横浜国立大類 23)　　(固有番号 s231102)

7.5　次の微分方程式を解きなさい.

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = -2xy + 3x$

(2)　$\dfrac{dy}{dx} = 3xy - 5xy^{-\frac{1}{3}}$ （ヒント：y の 4/3 乗を z とおいて z の微分方程式に変換すると線形になる.）

(千葉大類 23)　　(固有番号 s231204)

7.6 (1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 3y = \cos 2x$$

の解 $y = y(x)$ のうちで周期関数となるものを求めなさい．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 1$$

の解 $y = y(x)$ について $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y(x)$ の値を求めなさい．

(東京農工大類 23)　　(固有番号 s230901)

7.7 次の 1 階連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231301)

7.8 以下の微分方程式を解け．

(1) $x\dfrac{dy}{dx} - 2x^2y = y$　　(2) $4y^2 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 4$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = \sin 3x$

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231406)

7.9 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = a\sin x$　ただし，$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $y = a$ とする．

(2) $y\dfrac{dy}{dx} + x = 0$　ただし，$x = 1$ のとき $y = 0$ とする．

(3) $x^2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$　ただし，$x = 1$ のとき $y = 1$ とする．

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232001)

7.10 以下の問に答えなさい．

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + c^2y = 0$ の一般解を求めなさい．ただし，c は正の定数である．

(2) $f(t)$ を 2 回微分可能な関数とする．2 変数関数 $z(x, y) = f(3x - 4y)$ が
偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + z = 0$ の解となるような $f(t)$ を求めなさい．

(長岡技科大類 23)　　(固有番号 s232104)

7.11 変数 x の未知関数 y に関する微分方程式

$(*)$　$\dfrac{dy}{dx} - 2xy = xy^2$

について，次の問いに答えよ．

(1) $u = y^{-1}$ $(y \neq 0)$ とおいて，$(*)$ から u に関する 1 階線形微分方程式を導け．

(2) (1) を用いて微分方程式 $(*)$ を解け．

(富山大類 23)　　(固有番号 s232304)

7.12 つぎの微分方程式の一般解を導出して，初期条件を満たす解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$ (初期条件 : $x = 0$ のとき，$y = 0$)

(2) $\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 2e^x$ (初期条件 : $x = 0$ のとき，$y = 1$)

(3) $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x\,\cos x$ (初期条件 : $x = 0$ のとき，$y = 0$)

(福井大類 23) (固有番号 s232408)

7.13 次に示す微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} + 5y = f(x)$$

(1) $f(x) = 5$ として，以下の問いに答えよ．

(a) この微分方程式の特解 y_s を求めよ．

(b) この微分方程式の余関数（斉次方程式の一般解）が $C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$（ただし α, β は異なる実数）の形となり，$x \to \infty$ で 0 に収束するための a の条件を求めよ．

(2) $a = 1$, $f(x) = 10\sin x$, $y(0) = -1$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$ として，この微分方程式を解け．

(福井大類 23) (固有番号 s232410)

7.14 微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -ay$ は架空の放射性元素の個数 y（個）と時間 t（年）の関係を表しているとする．ただし，a は定数である．上式に関し，以下の問いに答えよ

(1) 時間 $t = 0$ のとき，$y = y_0$ とし，上式を積分しなさい．

(2) $y = \dfrac{1}{2}y_0$ となる時間が $t = 5000$ 年であるとき，定数 a を求めよ．

(3) $y = \dfrac{1}{1024}y_0$ であるとき，時間 t（年）を求めよ．なお $1024 = 2^{10}$ である．

(福井大類 23) (固有番号 s232421)

7.15 次の微分方程式の初期値問題の解 $y = y(x)$ を求めよ．

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2\sin 2x\,\cos 3x & (x \geqq 0) \\ y(0) = \dfrac{5}{3} & \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{x} & (x \geqq 1) \\ y(1) = 1 & \end{cases}$

(静岡大類 23) (固有番号 s232507)

7.16 次の各微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y\sin x$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = y(1-y)(2-y)$ (3) $\dfrac{dy}{dx} = y + \sin x$

(静岡大類 23) (固有番号 s232508)

7.17 $y(x)$ を未知関数とする微分方程式

$$y'' + 2y' + ay = 0 \qquad (*)$$

に対して以下の問に答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) $a = 1$ のとき，方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(2) $a > 0$ のとき，方程式 $(*)$ の任意の解 y に対し $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ が成り立つことを示せ．

(岐阜大類 23) (固有番号 s232607)

7.18 次の微分方程式 ① について以下の問に答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

(1) 関数 $y_1 = \dfrac{\cos x}{x}$ は，微分方程式 ① の解であることを示せ．

(2) x の関数 u について，$y = uy_1$ が微分方程式 ① の解であるとき，u は次の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2(\tan x)\frac{du}{dx} = 0$$

を満たすことを示せ．

(3) $\dfrac{du}{dx} = v$ とおくとき v を求めよ．

(4) u を求めよ．

(5) 微分方程式 ① の一般解を求めよ．

(静岡大類 23)　　(固有番号 s232509)

7.19 次の各微分方程式の初期値問題を解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) $y'' + 4y' + 3y = 0\ ,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

(2) $y'' + 4y' + 4y = 0\ ,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

(3) $y'' + 4y' + 5y = 0\ ,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

(静岡大類 23)　　(固有番号 s232510)

7.20 以下の問に答えよ．なお，$\dfrac{dy}{dt} = y'$ と記すことにする．

(1) 常微分方程式 $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ の一般解を求めよ．

(2) $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

(名古屋大類 23)　　(固有番号 s232801)

7.21 微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ は，条件 $\dfrac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$ を満たすとき，完全形

という．関数 $f(x)$ は $(0, \infty)$ で微分可能 かつ $f(\pi) = 1$ である．微分方程式

$$\Big(\sin x - f(x)\Big)\frac{y}{x}\,dx + f(x)\,dy = 0\ ,\quad x > 0$$

は完全形とするとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 微分方程式の一般解を求めよ．

(名古屋工業大類 24)　　(固有番号 s242908)

7.22 定数係数の 2 階線形微分方程式

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x\ ,\quad (\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0\ \ \text{定数})$$

が一つの特殊解 $y = e^{2x} + (1 + x)e^x$ を持つとする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 係数 α, β, γ を決めよ．

(2) 微分方程式の一般解を求めよ．

(名古屋工業大類 23)　　(固有番号 s232909)

7.23 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x$ において，初期条件 $y(0)=0,\ y'(0)=0$（ただし，$y'(x)\equiv dy(x)/dx$）を満たす解を求めよ．

(三重大類 23)　　(固有番号 s233107)

7.24 微分方程式 $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0$ の解について，以下の問に答えよ．ただし，$\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ であり．初期条件は，$x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$ とする．

(1) $\gamma=0,\ k=9$ の場合における微分方程式の解を求めよ．

(2) $\gamma=2,\ k=9$ の場合における微分方程式の解を求めよ．

(3) $\gamma=6,\ k=9$ の場合における微分方程式の解を求めよ．

(三重大類 23)　　(固有番号 s233110)

7.25 次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{t+x(t)}{t}\ ,\quad x(1)=3$$

(三重大類 23)　　(固有番号 s233114)

7.26 微分方程式 $y'=\dfrac{y(y-1)}{x}$ を解け．

(京都工芸繊維大類 23)　　(固有番号 s233404)

7.27 次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=2x(t)-3y(t)+F(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt}=y(t)-2x(t) \end{cases}$$

(1) $F(t)=0$ の場合，一般解 $x(t),\ y(t)$ を求めよ．

(2) $F(t)=e^{2t}$ の場合，$y(t)$ の特殊解を $y_1(t)=Ae^{2t}$ と表す．このとき，定数 A を求めよ．

(3) $F(t)=e^{2t}$ の場合，一般解 $x(t),\ y(t)$ を求めよ．

(4) $F(t)=e^{2t}$ の場合，初期条件 $x(0)=2,\ y(0)=0$ の下で解 $x(t),\ y(t)$ を求めよ．

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233502)

7.28 $q_1=q_1(t),\ q_2=q_2(t),\ q_3=q_3(t)$ についての連立微分方程式

$$\begin{aligned} {q_1}'' &= q_2+q_3-2q_1 \\ {q_2}'' &= q_3+q_1-2q_2 \\ {q_3}'' &= q_1+q_2-2q_3 \end{aligned}$$

を初期値

$$\begin{aligned} q_1(0)&=f, \qquad {q_1}'(0)=0 \\ q_2(0)&=f, \qquad {q_2}'(0)=0 \\ q_3(0)&=f, \qquad {q_3}'(0)=0 \end{aligned}$$

のもとで解け，ただし，f は定数である．

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233508)

7.29 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x+1)\dfrac{dy}{dx}-xy=0$　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=e^x$

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233608)

7.30 常微分方程式

$$y'' - y = e^{-x}$$

を初期条件 $y(0) = a,\ y'(0) = b$ のもとで解け．また，$x \geq 0$ で有界な解が存在するための a と b の必要十分条件を求めよ．（ここで $y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．）

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233805)

7.31 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 1 - y^2$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = \cos x$

(鳥取大類 23)　　(固有番号 s233908)

7.32 $u(r)$ は区間 $(0,\ \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とし，さらに，$u''(r)$ が $(0,\ \infty)$ 上で連続であるとする．関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = u(r) \quad (\text{ただし，} r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = u''(r) + \dfrac{1}{r}u'(r)$ を示せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ が成り立つためには，

$$u(r) = a \log r + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

と表されることが必要十分であることを示せ．

(広島大類 24)　　(固有番号 s244103)

7.33 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

(山口大類 23)　　(固有番号 s234301)

7.34 $\dfrac{dy}{dx} - 2x^2e^xy + e^xy^2 = 2x - x^4e^x$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) x^a が微分方程式の解となるように実数 a を求めよ．

(2) a を (1) で求めたものとする．$y = x^a + z$ を微分方程式に代入して，z の満たす微分方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた z の微分方程式を解いて，もとの微分方程式の解 y 求めよ．

(徳島大類 23)　　(固有番号 s234404)

7.35 時刻 t における，ある放射性元素の量を y とすれば次式が成り立つ．

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y \quad (\lambda \text{は正の定数})$$

$t = 0$ のとき $y = y_0$ として，この放射性元素の半減期（ $y = y_0/2$ になるまでの時間 ）を求めなさい．

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234904)

7.36 つぎの微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{-x}$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x$

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234908)

7.37 以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解を求めよ, なお, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(2) 微分方程式 $y'' + y = 6\sin x$ の特殊解を求めよ,

(3) 微分方程式 $y'' + y = 6\sin x$ の一般解を求めよ,

(長崎大類 23) (固有番号 s235012)

7.38 微分方程式 $y' + 4y^2 = 1$ を解け. 答えを求める過程も記述すること.

(長崎大類 23) (固有番号 s235016)

7.39 次の微分方程式の解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = x$$

(長崎大類 23) (固有番号 s235020)

7.40 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin(3x + 5)$$

(大分大類 23) (固有番号 s235105)

7.41 変数 t の関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ が次の連立微分方程式の初期値問題を満たしているとする.

$$(*) \cdots\cdots \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \\ x(0) = 1 , \qquad y(0) = 0 \end{cases}$$

このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 新しい関数 $r = r(t)$ と $\theta = \theta(t)$ を用いて, 関数 x, y を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, とおく（ただし, $r > 0$）. このとき, r, θ はそれぞれ

$$\frac{dr}{dt} = 2r , \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

を満たすことを示せ.

(2) 連立微分方程式の初期値問題 $(*)$ を解け.

(宮崎大類 23) (固有番号 s235305)

7.42 以下の問いに答えよ.

(1) $y_1 = ae^{-x}$, $y_2 = be^{2x}$（a, b は任意定数）はそれぞれ微分方程式 $yy'' - (y')^2 = 0$ の解であることを示し, 次に二つの解を足し合わせた関数 $y = y_1 + y_2$ は解ではないことを示せ.

(2) 次の微分方程式について, 与えられた条件を満たす解 $y = y(x)$ を求めよ.

$$y'' + 9y = 0 \quad : \ x = 0 \text{ のとき } y = 2,\ y' = 6$$

(鹿児島大類 23) (固有番号 s235402)

7.43 微分方程式 $y'' + 7y' + 12y = 0$ の一般解を求めなさい.

(鹿児島大類 23) (固有番号 s235408)

7.44 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$ の一般解を求めなさい.

(鹿児島大類 23) (固有番号 s235417)

7.45 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 4e^{-x}$$

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235502)

7.46 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $(1+x)\dfrac{d\,y(x)}{dx} - y(x) = 0$　　(2) $\dfrac{d\,y(x)}{dx} + y(x) = 2e^{-x}$

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235510)

7.47 微分方程式 $y' = x(1-y)$ の一般解を求めなさい.

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235514)

7.48 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

(首都大類 23)　　(固有番号 s235905)

7.49 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階非同次線形常微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = \cos x$$

の特殊解を求めよ．その結果をつかって，一般解を書き下せ.

(滋賀県立大類 23)　　(固有番号 s236002)

線形代数

8 ベクトル

8.1 ベクトル $\overrightarrow{N} = (2, 2, -1)$ に直交し，点 $(-1, 2, 3)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(北見工業大類 23)　　(固有番号 s230207)

8.2 xyz 空間に 2 点 $A(5, 3, 4)$，$B(1, -1, 2)$ を直径の両端とする球 S と点 $C(-1, -3, 1)$ がある. 次の問いに答えよ.

(1) 球 S の方程式を求めなさい.

(2) 2 点 A, B を通る直線に垂直で，球 S の中心を通る平面の方程式を求めなさい.

(3) 2 点 A, B を通る直線に平行で，点 C を通る直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(4) 直線 ℓ と球 S が交わる点の座標を求めなさい.

(岩手大類 23)　　(固有番号 s230301)

8.3 点 $P_0(a, b, 0)$ の位置から，速度 $\boldsymbol{v}_0 = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{k}$ で投げ出された質量 m の質点の軌跡を求めよ．$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ は，それぞれ x, y, z 軸上の長さ 1 の基本ベクトルであり，重力加速度は g（$-z$ 方向）とする.

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232009)

8.4 xyz 空間に，点 $P(0,0,5)$ を通る直線 ℓ と，点 $Q(0,4,2)$ を中心とする半径 r（ただし $r>0$）の球面 S がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 球面 S と接する直線 ℓ が存在するための r の範囲を求めよ．

(2) $r=1$ とし，点 P に点光源を置いたとき，xy 平面上にできる球面 S の影を領域 R とする，領域 R を表す不等式を求めよ．

(3) 領域 R の面積を求めよ．

(東北大類 23)　　(固有番号 s230501)

8.5 (1) xyz 空間において，3 点 $A(1,3,1)$, $B(2,4,3)$, $C(3,-3,-1)$ を通る平面を α とする．

(a) 平面 α の方程式を求めよ．

(b) 点 $P(1,1,1)$ からの距離が 5 であり，平面 α に平行な平面の方程式を求めよ．

(c) (b) で求めた平面に接し，点 P を中心とする球面を S とする，平面 α と球面 S が交わってできる円の中心座標と半径を求めよ．

(2) 四面体 $OABC$ において，線分 AB の中点を P，線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q，線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とする，また，3 点 O,B,C を通る平面と直線 AR の交点を S，直線 OS と直線 BC の交点を T とする．

(a) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(b) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と，四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1:V_2$ を求めよ．

注) (1),(2) のそれぞれの問題文中で使われている記号は，無関係である．

(東京大類 23)　　(固有番号 s230703)

8.6 次の 4 つのベクトルの中から．一次独立なものは最大でいくつ取ることができるか答えなさい．

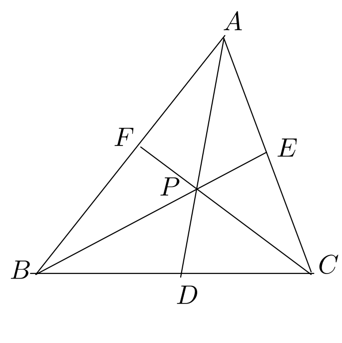
$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}4\\-4\\2\\4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix}-6\\0\\-3\\0\end{bmatrix}$$

(山梨大類 23)　　(固有番号 s231804)

8.7 (1) 右図のように三角形 ABC の各頂点から対辺を結ぶ線分が一点 P で交わるとする．このとき，各線分の間に

$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$$

の関係が成立することを証明せよ．



(2) この三角形において，

「$AF:FB=2:3,\ AE:EC=4:3$」のとき，

ベクトル $\overrightarrow{AP}$ をベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232016)

8.8 次のベクトル群が一次独立か一次従属かどうか判断せよ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}7\\9\\10\end{pmatrix}$$

(福井大類 23)　　(固有番号 s232419)

8.9 xyz 空間内に 4 点 $A(1,0,2)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,2,6)$, $D(4,2,-1)$ が与えられている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 3 点 A, B, C を通る平面 π の方程式を求めよ．

(2) 平面 π と点 D の距離を求めよ．

(3) 点 D から平面 π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(静岡大類 23)　　(固有番号 s232503)

8.10 以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a} = (1,\ 0,\ -2)$, $\boldsymbol{b} = (3,\ 2,\ -2)$, $\boldsymbol{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ がある．ただし，c_1, c_2, c_3 は実数である．$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交し，$\boldsymbol{c}$ の大きさは 9 である．$\boldsymbol{c}$ を求めよ．

(2) 直交座標空間内に，点 $D(3,\ -4,\ 2)$ を通りベクトル $\boldsymbol{p} = (1,\ -1,\ 0)$ に平行な直線がある．さらに点 $E(5,\ -6,\ 4)$ を中心とした半径 6 の球がある．直線と球との交点の座標 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ．

(豊橋技科大類 24)　　(固有番号 s242702)

8.11 座標平面上に楕円 C : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える．また，$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ を平面ベクトル全体のなす空間の正規直交基底とする．原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の直線が楕円 C と交わる点を P，原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ の直線が楕円 C と交わる点を Q とすると，

$$\frac{1}{||\overrightarrow{OP}||^2} + \frac{1}{||\overrightarrow{OQ}||^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

が成り立つことを証明せよ．

(広島市立大類 23)　　(固有番号 s234205)

8.12 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$$

が一次従属になるような x を求めよ．さらに，その x に対するベクトル $\boldsymbol{c}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表せ．

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234914)

8.13 直交座標系 $O-XYZ$ において，点 $A(1,-3,2)$ を含む平面 C_A : $-2x+y+3z-1=0$, 点 $B(1,-1,-2)$ を含む平面 C_B : $3x+2y+z+1=0$ がある．次の問いに答えよ．

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ．平面 C_A の点 A を通る法線の方程式，平面 C_B の点 B を通る法線の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) 両平面の交線の単位方向ベクトルを求めよ．

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235404)

8.14 次の問題に答えなさい．

(1) 二平面 $x+2y-z-4=0$ と $x-y+2z-4=0$ の交線の方程式を求めなさい．

(2) (1) の交線と点 $(0,\ 1,\ 0)$ とを通る平面の方程式を求めなさい．

(首都大類 23)　　(固有番号 s235902)

8.15 2 次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定義するとき，次の問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{d}$ を正規化したベクトル $\boldsymbol{u}_1$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{d}$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(3) 2 次元空間の基本ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ を用いて表せ.

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235014)

9 行列

9.1 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(北見工業大類 23)　　(固有番号 s230206)

9.2 次の行列 A, ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関する以下の設問に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) A^TA を求めなさい．ただし，A^T は A の転置行列である.

(2) A^TA が逆行列を持つことを示しなさい.

(3) $||A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||^2$ が最小となるような変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と置いたとき，p, q の値を求めなさい．ただし，$||\boldsymbol{a}||$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さを表す.

(千葉大類 23)　　(固有番号 s231202)

9.3 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in R$$

が

$${}^tAA = E_3$$

をみたすとする. このとき，A の各行ベクトルは長さが 1 で互いに直交することを示せ．ただし，${}^tA$ は A の転置行列，E_3 は 3 次の単位行列を表す.

(富山大類 23)　　(固有番号 s232301)

9.4 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$　　(4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　（t は転置を表す）

(福井大類 23)　　(固有番号 s232418)

9.5 3×3 行列 A と B は関係 $A^3 - AB = I$ を満たす. ただし, I は 3 次単位行列である.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) A^2 と A^{-1} を求めよ.

(2) B を求めよ.

(名古屋工業大類 23)　　(固有番号 s232908)

9.6 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A^2 を求めよ.

(2) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ.

(3) ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合で表せ.

(奈良女子大類 23)　　(固有番号 s233201)

9.7 次の行列が逆行列を持つ場合は, 逆行列を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a \\ b & b+c & b+1 \end{bmatrix}$

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233611)

9.8 次の行列 X, Y の逆行列をそれぞれ求めよ（a は複素数とし空欄の成分は 0 とする.）

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ a & & & 1 \end{pmatrix}$$

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233801)

9.9 λ を実定数とし, 3 次実正方行列 A, B を次で定める.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ. ただし, 3 次実正方行列 X, Y が可換であるとは, $XY = YX$ が成り立つことである.

(1) A と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(2) B と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(3) B と可換な 3 次実正方行列どうしは可換であることを示せ.

(広島大類 24)　　(固有番号 s244101)

9.10 次式で与えられるベクトルと行列に対して，積が定義できる組を選びその積を求めよ．

ベクトル　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(長崎大類 23)　(固有番号 s235013)

9.11 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大類 23)　(固有番号 s235021)

9.12 次の行列の逆行列を求めなさい．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大類 23)　(固有番号 s235406)

9.13 以下の問いに答えなさい．なお，一般の 2×2 の正方行列：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{A}^2 - (a+d)\boldsymbol{A} + (ad-bc)\boldsymbol{E} = 0$ が成り立つこと（ハミルトン・ケーリーの定理）を参考にしても構いません．

(1) 行列：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ が成り立つとする．$a + d = 1$ のとき，$ad - bc$ の値を求めなさい．

(2) 行列：$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{B}^3$, $\boldsymbol{B}^{100}$ を求めなさい．

(鹿児島大類 23)　(固有番号 s235411)

9.14 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) P の逆行列を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて，A^n（ n は自然数 ）を求めよ．

(香川大類 23)　(固有番号 s235702)

9.15 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような k の値を求めよ．また，$k = 2$ のとき A の逆行列を求めよ．

(滋賀県立大類 23)　(固有番号 s236003)

10 行列式

10.1 $P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=x^2+cx+d$ を実数係数の x の 2 次多項式とし，次の 4 次正方行列を考える．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & c & d & 0 \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 2 つの x の 2 次方程式 $P(x)=0$, $Q(x)=0$ が共通の実数解 α をもつとき

$$A\begin{bmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}=o$$

となることを示し，A の行列式 $|A|$ は 0 となることを示せ．ただしここで o は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の原点を表すものとする．

(3) $P(x)=(x-1)(x-2)$ とする．このとき $|A|=Q(1)Q(2)$ であることを示し，$\operatorname{rank} A \leqq 3$ ならば $P(x)=0$, $Q(x)=0$ は少なくとも一つの共通の実数解をもつことを示せ

(4) $P(x)=0$ が 2 つの実数解 $x=\alpha$, β $(\alpha \neq \beta)$ を持つとする．このとき $\operatorname{rank} A=2$ であれば, $P(x)=0$, $Q(x)=0$ は 2 つの共通の実数解をもつことを示せ.

(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230602)

10.2 微分可能な関数 $f_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,3)$ に対して

$$f(x)=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}$$

とおく．このとき，$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f'_{31}(x) & f'_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}$$

と表されることを示せ．ただし，$|\quad|$ は行列式を表す.

(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230607)

10.3 実数 a,b,c,d に対し，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $\det B$ を $\det A$ で表せ.

(2) $\operatorname{rank}A=0$ のとき $\operatorname{rank}B$ を求めよ.

(3) $\operatorname{rank}A=1$ のとき $\operatorname{rank}B$ を求めよ.

(4) $\operatorname{rank}A=2$ のとき $\operatorname{rank}B$ を求めよ.

(東京工業大類 23)　　(固有番号 s230802)

10.4 a は実数とする．次の行列を A とし，3 次単位行列を E とする．

$$\begin{pmatrix} -10a-11 & 13a-23 & -30a-30 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4a+4 & -7a+17 & 12a+11 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|E-A|$ を展開して a の式で表しなさい．

(2) t の方程式 $|tE-A|=0$ の解がすべて負の実数となるような a の範囲を求めなさい．

(東京農工大類 23)　　(固有番号 s230904)

10.5 以下の $n\times n$ 行列 J_n を考える．

$$J_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

例えば,

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

である，J_n の行列式を a_n とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2 を求めよ．

(2) a_3 を求めよ．

(3) a_4 を求めよ．

(4) a_n を求めよ．但し，$n=2,3,4,\cdots$

(横浜国立大類 23)　　(固有番号 s231101)

10.6 以下の 3 つの問に答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A の行列式を求めよ．

(3) (1) で求めた行列 A の逆行列を求めよ．

(群馬大類 23)　　(固有番号 s231503)

10.7 (1) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ y+z & z+x & x+y \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$ を証明せよ．

(2) $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 12 \\ 3 & 12 & 11 \\ 12 & 11 & 3 \end{vmatrix}$ を求めよ．

(福井大類 23)　　(固有番号 s232409)

10.8 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列が逆行列をもつときの x の条件を求めよ．また，そのときの逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大類 24)　　(固有番号 s242901)

10.9 次の問いに答えよ.

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

を求めよ.

(2) $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 行列とし,

$$a_{ij} = |i - j| \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

とする．このとき，A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233605)

10.10 $0 \leqq a \leqq 1$ に対して, 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a & 1 & -1 \\ 0 & 9a & 3 \\ \frac{3}{4}a & 1 & -a \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．ここで，$\det(M)$ は正方行列 M の行列式を表す.

(1) $\det(A)$ を求めよ.

(2) $f(a) = \det(A)$ とする．$f(a)$ のグラフを図示せよ.

(3) n を自然数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \det(A^n)$ を求めよ.

(徳島大類 23)　　(固有番号 s234401)

10.11 3×3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，E を 3×3 単位行列とする．以下の問いに答えよ.

(1) x についての多項式として，$|xE - A| = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ が成立するように， 定数 a_0，a_1，a_2，a_3 を定めよ．ただし，$|xE - A|$ は行列 $xE - A$ の行列式を表す.

(2) (1) で求めた定数 a_0，a_1，a_2 に対し，$a_0A^2 + a_1A + a_2E$ を求めよ.

(九州大類 23)　　(固有番号 s234703)

10.12 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235022)

10.13 以下の (1),(2),(3) に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ としたとき，行列の積 AB を求めなさい.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -x \\ 1 & -6 & 11 & 6 \end{vmatrix}$ が正となる実数 x の条件を求めなさい.

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235511)

10.14 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 11 & 8 & 13 \\ 2 & 8 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ の値を求めよ

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大類 23)　　(固有番号 s236401)

11 連立方程式

11.1 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} + z - w = 1 \\ 3x + y + 2z + w = 1 \\ \phantom{3x+{}} y - z + 5w = -1 \end{cases}$$

(秋田大類 23)　　(固有番号 s230401)

11.2 次の連立一次方程式が解をもつための条件（a の値）を求め, その条件のもとでの一般解を示せ.

$$\begin{cases} x + y - 2z + u = 2 \\ -x - 2y + 3z - u = 3 \\ 2x + y - 3z + 2u = a \end{cases}$$

(豊橋技科大類 23)　　(固有番号 s232703)

11.3 実数 a に対して，次の連立一次方程式が解を持つかどうか調べよ．また，解が一意でない場合には一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x & + & ay & + & a^2z & + & a^3w & = & 1 \\ a^3x & + & y & + & az & + & a^2w & = & -1 \\ a^2x & + & a^3y & + & z & + & aw & = & 1 \\ ax & + & a^2y & + & a^3z & + & w & = & -1 \end{cases}$$

(東京工業大類 23)　　(固有番号 s230801)

11.4 次の連立一次方程式を掃き出し法によって三角行列に変形して，x_1, x_2, x_3 を求めなさい．解答に際しては，以下の各段階に対応する行列を明記しなさい．

$$\begin{cases} 10x_1 & - & 30x_2 & + & 20x_3 & = & 310 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & - & 69x_3 & = & 43 \\ 9x_1 & - & 20x_2 & - & 82x_3 & = & 334 \end{cases}$$

第 1 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

第 2 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \end{array}\right]$$

第 3 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231307)

11.5 次の連立一次方程式について考える．

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 3 \\ x + 5y - 4z = -3 \end{cases}$$

(1) 上の連立方程式の係数行列を $\boldsymbol{A}$ とするとき，$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = 3$ となることを示せ．

(2) クラメールの公式を使って x, y, z を求めよ．

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231404)

11.6 a を実数とする．x, y, z, w に関する連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x & + & 2y & + & z & + & 4w & = & 1 \\ x & + & y & & & + & 3w & = & a \\ x & - & y & - & 2z & + & w & = & a^2 \end{cases}$$

について次の問いに答えよ．

(1) $(*)$ が解を持つような a の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた a の値それぞれについて $(*)$ の解を求めよ．

(京都工芸繊維大類 23)　　(固有番号 s233401)

11.7 R^3 の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対し，以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を列ベクトルとする行列を係数行列に持つ連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

が解を持つように定数 α の値を定めよ．また，そのときの一般解を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が線形従属か線形独立かを調べよ．線形従属の時には $\boldsymbol{a}_3$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ.

(3) $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合 $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2$ が $\boldsymbol{a}_1$ に直交する単位ベクトルとなるとき，実数 x と y の値を求めよ.

(岐阜大類 23)　　(固有番号 s232603)

11.8 c を実数とする．4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

について次の問に答えよ.

(1) 方程式

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

が解をもつための c の条件を述べよ．またそのときの解を（複数あるならばそのうち一つを）求めよ.

(2) 方程式

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が解をもつための c の条件を述べよ．またそのときの解を（複数あるならばそのうち一つを）求めよ.

(愛媛大類 23)　　(固有番号 s234602)

11.9 次の連立一次方程式が解をもつように定数 k の値を定め, そのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 3y - z = k & \cdots\cdots \quad ① \\ 2x + y + 3z = 5 & \cdots\cdots \quad ② \\ 3x + 2y + 4z = 9 & \cdots\cdots \quad ③ \end{cases}$$

(名古屋工業大類 23)　　(固有番号 s232901)

11.10 次の連立一次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x\ +4y+7z=\ 1 \\ 2x+5y+8z=\ 3 \\ 3x+6y+9z=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x+2y+5z=-2 \\ x\ +3y+\ z=-3 \\ 3x-2y+3z=\ 2 \end{cases}$

(佐賀大類 23) (固有番号 s234915)

11.11 x, y, z についての連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -2 \\ -2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = a \end{cases}$$

が解を持つように，定数 a を定めて解を求めよ.

(愛媛大類 23) (固有番号 s234611)

11.12 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} -x + 5y + 3z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ -3x + 7y + 5z = -1 \end{cases}$$

を解け.

(はこだて未来大類 23) (固有番号 s236302)

11.13 3 行 2 列行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

で定め，その転置行列を A^T で表す．さらに，行列 B と行列 P を

$$B = A^T A\,, \quad P = AB^{-1}A^T$$

により定める．ここで，B^{-1} は B の逆行列を表す．また，A の転置行列 A^T とはその i 行 j 列成分が A の j 行 i 列成分であるような 2 行 3 列行列のことである.

(1) B を求めなさい.

(2) P を求めなさい.

(3) 連立方程式

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解きなさい.

(大分大類 23) (固有番号 s235108)

11.14 次の連立一次方程式がただ一組の解を持つように a の値を定め，そのときの解を求めなさい.

$$\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 3x+ay+z=2 \\ 2x-2y+(a+3)z=a-5 \end{cases}$$

(首都大類 23) (固有番号 s235901)

11.15　以下の $A,\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X}$ について次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1)　行列 A の逆行列を求めよ.

(2)　逆行列を用いて $A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ を満たす x, y, z（未知の実数）の値を求めよ.

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235006)

11.16　a, b, c, d, p, q を実数とし，$ad - bc \neq 0$ と仮定する．x, y についての連立 1 次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

に関する以下の問いに答えよ.

(1)　$a \neq 0$ のとき，掃き出し法で連立方程式 $(*)$ を解け.

(2)　$a = 0$ のとき，連立方程式 $(*)$ を解け.

(3)　(1) の解を整理して $a = 0$ とおいたものと，(2) の解とが一致することを確かめよ.

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233809)

12　線形変換

12.1　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表される xyz 空間内の線形変換を f とする．次の問いに答えなさい.

(1)　線形変換 f によって直線 $\ell : x - 1 = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(2)　線形変換 f によって平面 $\alpha : x + y + z = 1$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(3)　逆変換 f^{-1} を表す行列を求めなさい.

(4)　線形変換 f によって平面 $\beta : x + y = 1$ に移されるもとの図形を求めなさい

(岩手大類 23)　　(固有番号 s230302)

12.2　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f によって，直線 $2x - y + 1 = 0$ が直線 $5x - y + 7 = 0$ に移されるとき a, b の値を求めよ.

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232010)

12.3　下記の式で表される楕円 C_1 を反時計回りに 45 °回転して得られる像を C_2 とする.

$$c_1 \ : \ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

(1)　C_1 を C_2 に写す一次変換を表す行列 A を求めよ.

(2)　図形 C_2 を表す式を求めよ.

(3)　図形 C_2 上の点 $P(x,\ y)$ において, P が C_2 上を移動する時, $x,\ y$ がそれぞれとる値の範囲を求めよ.

(豊橋技科大類 23)　　(固有番号 s232702)

12.4 ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}_1$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{e}_2$ を満たすとき，未知数 y を成分に含むベクトル

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

に関して以下の設問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(2) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形従属のとき，$\boldsymbol{c}$ の f による像 $f(\boldsymbol{c})$ を求めよ.

(3) $f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{e}_3$ ならば，f に逆写像 f^{-1} が存在し，$f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A は $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$ に等しいことを示せ.

(4) $f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{e}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ を満たす行列 B を求めよ.

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231310)

12.5 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ による一次変換について，以下の問に答えよ.

ここで，一次変換とは下式に示すように，任意の平面上の座標 (x, y) を (x', y') に移す変換をいう.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) $a = 1,\ b = k$（k は任意の実数）のとき，xy 平面全体が xy 平面全体に移される条件と，直線に写される条件を示せ. また，直線に移された場合の直線の式を求めよ.

(2) 直線 $2x + y = 0$ が，直線 $6x - 5y = 0$ に移されるとき，a, b の値を求めよ.

(三重大類 23)　　(固有番号 s233106)

12.6 $\dfrac{(x+y)^2}{18} + \dfrac{(x-y)^2}{8} = 1$

で与えられる楕円について，次の問いに答えよ.

(1) 与式を満足する点の集合を図示せよ.

(2) 与えられた楕円を回転させ，長軸を x 軸に一致させるために必要な回転行列を求めよ.

(3) 与えられた楕円を半径 1 の円に変換する行列を求めよ.

(佐賀大類 23)　　(固有番号 s234909)

12.7 線形写像 $f : R^3 \to R^3$ は，${}^t(1, 0, 0)$ を ${}^t(1, 0, -1)$ へ，${}^t(0, 1, 1)$ を ${}^t(0, 1, 0)$ へ，${}^t(0, 1, 2)$ を ${}^t(2, 1, -2)$ へ，それぞれ移すものとする. ここで ${}^t\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の転置を表す. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が 1 次従属であることを示せ.

(2) $f(x) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in R^3)$ となるような行列 A を求めよ.

(3) (2) で求めた行列 A について，行列 A の階数を求めよ.

(はこだて未来大類 23)　　(固有番号 s236303)

13　固有値とその応用

13.1　以下に示す行列 P と A について各設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

(1)　行列 P の固有値を求めよ．

(2)　行列 A を，P, a, b, c, d および単位行列 E を用いて表せ．

(3)　行列 A の固有値を求めよ．

(4)　行列式 $|A|$ を求めよ．

(北海道大類 23)　　(固有番号 s230104)

13.2　行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の設問 (1),(2) に答えよ．

(1)　P の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ になることを確かめよ．

(2)　P の第 1 列ベクトルを $\boldsymbol{p}_1$，第 2 列ベクトルを $\boldsymbol{p}_2$ とする．$\boldsymbol{p}_1$ が，ある 2×2 行列 A の固有値 1 の固有ベクトルであり，$\boldsymbol{p}_2$ が，同じ行列 A の固有値 -1 の固有ベクトルであるとき，A を求めよ．

(秋田大類 23)　　(固有番号 s230402)

13.3　$\mathbb{R}^3$ を実数を成分とする 3 次元ベクトルよりなる実ベクトル空間,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1)　A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2)　$v \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\left(\frac{1}{2}A\right)^n v \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $n \longrightarrow \infty$ で収束するとき，その極限を

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}A\right)^n v = \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix}$$

とあらわす．この極限が存在し 0 でないとき， 成分の比 $x_\infty : y_\infty : z_\infty$ を求めよ．

(東北大類 23)　　(固有番号 s230503)

13.4　$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．

(1)　行列 A の固有値を求めよ．

(2)　自然数 n に対して，行列 A^n を計算せよ．

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231407)

13.5 任意の実 2×2 行列を無限回作用させることにより，平面上の点はどこに行き着くかについて考察せよ．以下の (1) から (5) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい．

(1) 上三角行列

$$T=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

の固有値を求める．

(2) 行列 T の n 乗を計算する．

(3) 行列 T のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合，実平面上の点

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

は行列 T を無限回作用するとどのような点に近づくか考える．ただし，$\alpha,\beta,\gamma,x_1,x_2$ はすべて実数であるとする．

(4) 2×2 行列 M に対し

$$Me=\lambda e$$

を満たす単位固有ベクトルを

$$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

とし．この成分 a,b を用いて正則行列

$$P=\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}$$

を定義する．行列 $P^{-1}MP$ の (2,1) 成分（左下の要素）がゼロになることを確かめ，任意の 2×2 行列が上三角行列に変換されることを示す．　さらに．$T_0=P^{-1}MP$ とするとき n を自然数として

$$M^n=P(T_0)^nP^{-1}$$

が成立することを示す．

(5) 行列 B の要素がすべて実数で， 固有値の絶対値が 1 より小さいとする．　このとき行列 B を無限回作用すると， 実平面上の点はどのような点に近づくか考えてみる．

(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230604)

13.6 行列 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値，固有空間を求めよ．　(2) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231317)

13.7 4次正方行列　$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$　について．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を計算せよ．　(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 4 次正則行列 P を求めよ．

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231320)

13.8 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，下の (1)〜(5) を答えよ．

ただし，３つのベクトル $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{m}_3$ を $\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{m}_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，$M = [\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_3]$ と表される行列 M は $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ であるとする．

(1) 行列の３つの固有値を a_1，a_2，a_3 および固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = |\boldsymbol{u}_3| = 1$ とすること．

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を用いて作られる行列 U を $U = [\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3]$ とする．$UV = I$ のように行列 U に右からかけると単位行列 I となる行列 V を求めよ．

(3) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ は互いにどのような関係にあるか説明せよ．

(4) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ と行列 U について, 下式を満たすような３つの行列 P_1，P_2，P_3 を求めよ．ただし，P_1，P_2，P_3 はそれぞれ３行３列の行列であり，$\mathbf{0}$ は零ベクトルである．

$$\begin{cases} P_1U = [\ \boldsymbol{u}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}\ ] \\ P_2U = [\ \mathbf{0} \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \mathbf{0}\ ] \\ P_3U = [\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{u}_3\ ] \end{cases}$$

(5) 行列 A の n 乗である A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(東京大類 23)　　(固有番号 s230705)

13.9 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とし，I を３次の単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の逆行列があれば求めよ．

(2) 行列式 $\det(\lambda I - A)$ を λ に関する多項式の形に整理せよ．

(3) $A\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$ となる $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつような，実数 λ_0 を求めよ．また，そのときの $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ をひとつ答えよ．

(4) A^{2010} を求めよ．

(電気通信大類 23)　　(固有番号 s231001)

13.10 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値 λ をすべて求めよ．

(2) A を直交行列によって対角化せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを 1 とする．${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の値が最大となる $\boldsymbol{x}$ を求めよ．${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(4) n を自然数とするとき，A^n を求めよ．

(茨城大類 24)　　(固有番号 s241701)

13.11 行列 $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として，次の問に答えなさい．

(1) $\boldsymbol{v}$ は A の固有ベクトルであることを示しなさい．また，その固有値を求めなさい．

(2) A の行列式 $|A|$ を計算し，この式を因数分解した式で表しなさい．

(3) x, y, z を実数とするとき，$x+y+z \geqq 0$ なら $|A| \geqq 0$ を示しなさい．

(山梨大類 23)　　(固有番号 s231801)

13.12 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(山梨大類 23)　　(固有番号 s231803)

13.13 a を実数とする．このとき，3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A を対称行列と交代行列の和で表せ．

(2) A が正則であるための a の値に関する条件を求めよ．また，A が正則であるとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) $a \geqq 0$ のとき, A は対角化可能であることを証明せよ．

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232006)

13.14 $A=\begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，$A^2=A$ が成り立っているとき，以下の問に答えなさい．

(1) x, y を求めなさい．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(長岡技科大類 23)　　(固有番号 s232102)

13.15 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1，λ_2，λ_3 $(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．$i=1,2,3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $i=1,2,3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) ${}^tPAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 9 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ をみたす直交行列 P を 1 つ求めよ．ただし，${}^tP$ は P の転置行列である．

(3) ${}^tP\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．また自然数 n に対して，$A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(金沢大類 23)　　(固有番号 s232201)

13.16 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(金沢大類 23)　　(固有番号 s232204)

13.17 座標変換によって，曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形（標準系）に書き換えたい．ここでは，この変換を次の手順によって行う．以下の問いに答えよ，途中経過がわかるように記述しないと減点する．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) ２つの固有ベクトルを正規化した列ベクトル（単位長さとした列ベクトル）を $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とする．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を書け．（どちらが $\boldsymbol{p}$ でもよい）

(3) これらの列ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を使って，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ を表せ．

(例：列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ という行列を表せる．)

(4) 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ によって対角化せよ．ここで，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列である．

(5) $\boldsymbol{x}$を$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{PX}$ で座標変換する．ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ である．さて，このとき，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}\right)\boldsymbol{X}$ となることを示せ．ここで，$\boldsymbol{x}^T$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置で，$\boldsymbol{P}^T$ は $\boldsymbol{P}$ の転置行列である．

(6) 問題 (4) と (5) の答を使って，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax} = x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形に変換せよ．ここで，α と β は上記の座標変換の結果から決まる数値（スカラー）である．

(福井大類 23)　　(固有番号 s232407)

13.18 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値の中で，中間の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大類 23)　　(固有番号 s232420)

13.19 次の行列 A を対角化せよ．なお，A を対角化する正則行列 P も明記すること．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(静岡大類 23)　　(固有番号 s232504)

13.20 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ およびベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えよ.

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ.

(2) $\boldsymbol{b}$ を A の固有ベクトルの線形結合で表せ.

(3) $A^5\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(岐阜大類 23)　　(固有番号 s232604)

13.21 n 行 n 列の行列 B の第 $i,\ j$ 成分 b_{ij} が $b_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$ $\quad(i,\ j = 1, 2, \cdots, n)$ のように与えられるとき, この行列 B は唯一の固有値を持つ. それでは, $n = 3,\ (w_1,\ w_2,\ w_3) = (3,\ 2,\ 1)$ のときの B の固有値を求めよ.

(豊橋技科大類 23)　　(固有番号 s232704)

13.22 以下の問に答えよ.

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) A^5 を求めよ.

(名古屋大類 23)　　(固有番号 s232802)

13.23 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を A とする. ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して, 内積を使って関数を $Q(\boldsymbol{u}) = (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ と定義する.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 条件 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1$ の下での関数 $Q(\boldsymbol{u})$ の最大値と最小値を求めよ.

(名古屋工業大類 23)　　(固有番号 s232902)

13.24 次の行列 A と P について，問 (1) と (2) に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ $\quad(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．このとき行列 P が直交行列で，かつ次を満たすように a, b, c を求めよ.

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大類 24)　　(固有番号 s242902)

13.25 行列要素がすべて実数である正方行列 A に，0 ではない実数である一つの固有値 μ があるとする．一つの固有値には少なくとも一つの固有ベクトルがある．そこで，ベクトル $\boldsymbol{y}$ を固有値 μ に対応する固有ベクトルとする．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ において，ベクトルの各成分をそれに共役な複素数に置き換えて得られるベクトルを $\boldsymbol{x}^*$ と表すことにする． ベクトル $\boldsymbol{y}^*$ は固有値 μ に対応する固有ベクトルであることを示せ．さらに，固有値 μ に対応する固有ベクトルで，ベクトルの成分がすべて実数であるベクトルが少なくとも一つはあることを示せ.

(豊橋技科大類 24)　　(固有番号 s242703)

13.26 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A を対角化することにより，A^{17} を求めよ.

(3) 正則行列の持つ性質について列挙せよ.

(三重大類 23)　　(固有番号 s233109)

13.27 以下の問に答えなさい.

(1) 次の行列 A の固有値 λ_1，λ_2 とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ をひとつ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 問 (1) で求めた固有ベクトルからなる行列 $P = (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2)$ を用いて，$P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) n が正の整数のとき，問 (2) の結果を利用して，A^n を求めなさい.

(三重大類 23)　　(固有番号 s233115)

13.28 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について考える．ただし，a は実数とする.

(1) 行列 A の固有値の一つが 0 である場合，a の値を求めよ.

(2) $a = -1$ の場合について，A の固有値と固有ベクトルを求めて, A を対角化せよ.

(3) $\boldsymbol{x}$ を長さ 1 のベクトルとする．ベクトル $\boldsymbol{y}$ を，$\boldsymbol{x}$ の A による一次変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ とする.
$a = -1$ の場合について，$\boldsymbol{y}$ の長さ $|\boldsymbol{y}|$ を最大とする $\boldsymbol{x}$ を求めよ． また，そのときの長さ $|\boldsymbol{y}|$ を求めよ.

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233506)

13.29 次の問いに答えよ.

(1) ある実対称行列は異なる固有値をもつとする． このとき，異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを示せ.

(2) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，A の固有値，固有ベクトルを求め，A を対角化せよ.

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233606)

13.30 3 次元空間内の点 $A,\ B$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ とする．

(1) 行列

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ．

(2) (1) の行列 C を用いて，

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}\ , \quad ||\boldsymbol{x}|| \leqq 1$$

とするとき，点 B 全体のなす図形の体積を示せ．ただし，$||\boldsymbol{x}||$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさを表す．

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233607)

13.31 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式の値を求めよ．

(2) 逆行列を求めよ．

(3) 固有値を求めよ．

(鳥取大類 23)　　(固有番号 s233907)

13.32 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において，すべての成分 a, b, c, d が正数のとき，次の問いに答えよ．

(1) A は異なる実数の固有値を持つことを示せ．

(2) 固有ベクトルとして少なくとも一つは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(x > 0,\ y > 0)$ となるベクトルがとれることを示せ．

(岡山大類 23)　　(固有番号 s234003)

13.33 次の 3 次正方行列 A について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトル空間の基底をそれぞれ求めよ．

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P およびそれに対応する D を求めよ．

(4) 問 (3) で求めた D に対し，D^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(5) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(広島市立大類 23)　　(固有番号 s234204)

13.34 行列 $\begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ の固有値を求めなさい．また，その固有値の中で絶対値の最も大きな固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．ただし，i は虚数単位を表し，固有値と固有ベクトルは複素数の範囲で求めることとする..

(山口大類 23)　　(固有番号 s234302)

13.35 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする．A の固有値は τ と $\overline{\tau} = -\dfrac{1}{\tau}$ であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \tau \end{pmatrix}$ は固有値 τ と $\overline{\tau}$ に対する固有ベクトルで，単位ベクトルとなることを示せ．

(3) $\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_n = A^n \boldsymbol{v}_0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，$\boldsymbol{v}_n = \dfrac{\tau^n \boldsymbol{u}_1 - \overline{\tau}^{n-1} \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{1+\tau^2}}$ を示せ．

(高知大類 23)　　(固有番号 s234503)

13.36 a を正の実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の行列式の値が 6 となるような a の値を求めよ．

(2) 行列 A の固有値が二つの実数となるような a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対し，行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(高知大類 23)　　(固有番号 s234505)

13.37 3×3 行列 B, C をそれぞれ

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とし，点 $P_n(x_n,\ y_n,\ z_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を $x_1 = y_1 = z_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 C の逆行列 C^{-1} を求めよ．

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ行列 B の固有ベクトルであることを示せ．

(3) $a_n,\ b_n,\ c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$a_{n+1},\ a_n$ の間に成立する関係式を求めよ．

(4) $n \to \infty$ としたとき，点 P_n はある点 P_∞ に近づくことを示し，点 P_∞ を求めよ．

(九州大類 23)　　(固有番号 s234704)

13.38 3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

について次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の階数を求めよ.

(3) A の各固有値に対する固有空間をそれぞれ求めよ.

(4) 適当な正則行列 P によって A を対角化せよ.

(愛媛大類 23) (固有番号 s234601)

13.39 次の対称行列を対角化せよ．対角化するための直交行列も求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大類 23) (固有番号 s234916)

13.40 以下の行列 A の固有値, および長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(長崎大類 23) (固有番号 s235007)

13.41 行列 $A = \dfrac{1}{\alpha\beta+3}\begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ 1.5 & \beta \end{pmatrix}$ の逆行列の固有値が 2 と 2.5 であるとき，実数 α 及び β の値を求めよ．なお，$\alpha \geq \beta$, $\alpha\beta \neq -3$ とする．求める過程も記述すること.

(長崎大類 23) (固有番号 s235017)

13.42 次の行列に対して，固有値および固有ベクトルを求め，対角化しなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(大分大類 23) (固有番号 s235106)

13.43 行列 A が

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられている．ただし，a は正の実数とする.

(1) A の行列式を求めなさい.

(2) A の余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ を求めなさい.

(3) A の逆行列が存在するための条件と，そのときの逆行列を求めなさい.

(4) A の固有値と長さ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(大分大類 23) (固有番号 s235107)

13.44 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) それぞれの固有ベクトルからなる空間を V とし, V の正規直交基底を求めなさい.

(3) 設問 (2) の結果を用いて，行列 A を $R^T AR$ により対角化する直交行列 R を求めなさい．ただし，R^T は R の転置行列である.

(熊本大類 23)　　(固有番号 s235201)

13.45 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たす列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) 行列 A の固有値の 1 つは 0 である．この固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(宮崎大類 23)　　(固有番号 s235301)

13.46 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235416)

13.47 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235501)

13.48 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような，正則な正方行列 P を求めよ．ただし, 行列 P は直交行列（逆行列と転置行列が等しい行列）とする.

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235508)

13.49 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ を対角化する直交行列 P を求め，行列 A を対角化しなさい.

(首都大類 23)　　(固有番号 s235903)

13.50 行列 $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(はこだて未来大類 23)　　(固有番号 s236301)

13.51 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 14 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大類 23)　　(固有番号 s236402)

14 線形空間など

14.1 $\mathbb{R}^4$ における 4 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底となることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ を基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ の一次結合で表せ．

(東北大類 23)　　(固有番号 s230504)

14.2 $n \geq 5$ とし，n 次以下の実多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ のなす線形空間を W とし

$$V = \{f(x) \in W \mid f'(1) = f''(1) = 0\}$$

とおく（ V は W の部分空間である ）． V の基底および次元を求めよ．

(東北大類 23)　　(固有番号 s230505)

14.3 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$f : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，以下の各問に答えよ．

(1) f の表現行列 A を求めよ．

(2) A の固有値およびそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大類 23)　　(固有番号 s230608)

14.4 実数を成分とする 2×2 行列全体を V として，以下の問題に答えなさい．

(1) 以下のような $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ は V のひとつの基底であることを示しなさい．

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) V から V への一次変換 A が以下を満たしているとき，基底 $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ による A の行列表現を求めなさい．

$$A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) A の固有値を全て求めなさい．

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231311)

14.5 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_3$$

で定める．ここで，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_i)$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{a}_i$ の $\mathbb{R}^4$ での標準内積を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{a}_1)$，$f(\boldsymbol{a}_2)$，$f(\boldsymbol{a}_3)$，$f(\boldsymbol{a}_4)$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と基底を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}(f)$ の次元を求めよ．

(4) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ に関する表現行列を求めよ．

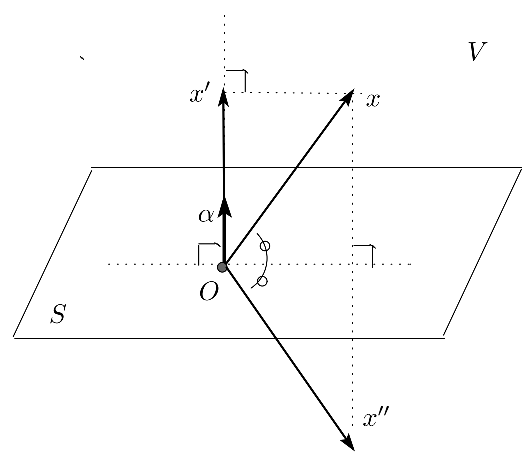
(電気通信大類 23)　　(固有番号 s231002)

14.6 3次元空間において，下図に示す平面 S とベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える．平面 S は原点 O を通り，その法線ベクトルは $\boldsymbol{a}(\neq 0)$ である．また $\boldsymbol{x}$ は原点 O を始点とする任意のベクトルである．以下の問いに答えよ．ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ と表すこと．

(1) $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影を $\boldsymbol{x}'$ とする，$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{x}$ の平面 S に関する折り返しを表すベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とする．$\boldsymbol{x}''$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(3) (2) において，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}''$ を対応させる写像は線形写像である．いま，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ とおいた場合に，この線形写像を表す行列を求めよ．



(筑波大類 23)　　(固有番号 s231304)

14.7 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$　$\bigl(T(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3\bigr)$ を考える．

(1) 写像 T の像 $\mathrm{Im}\,T$ の基底を1組求めよ．

(2) 写像 T の核 $\mathrm{Ker}\,T$ の基底を1組求めよ．

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231408)

14.8 2 次実正方行列の全体を $M(2;R)$ とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2;R)$ と $M(2;R)$ の 2 つの部分集合 $T = \{X \in M(2;R) \mid Tr\,X = 0\}$, $S = \{Y \in M(2;R) \mid {}^tY = Y\}$ について以下を示せ．
ただし; $Tr\,X$ は X のトレース，${}^tY$ は Y の転置行列とする．

(1) $ad - bc \neq 0$ のとき $X \in T$ ならば $AXA^{-1} \in T$ が成り立つ．

(2) $Y \in S$ ならば $AY\,{}^t\!A \in S$ が成り立つ．

(3) 写像 $\Phi : T \to S$ を $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in T$ に対して $\Phi(X) = \begin{pmatrix} y & -x \\ -x & -z \end{pmatrix}$ で定める．
$ad - bc = 1$ のとき任意の $X \in T$ に対して

$$\Phi(AXA^{-1}) = A\,\Phi(X)\,{}^t\!A$$

が成り立つ．

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231319)

14.9 X, Y, Z を集合とする．写像 $f : X \to Y$ ，$g : Y \to Z$ と合成写像 $g \circ f : X \to Z$ について，以下を示せ．

(1) $g \circ f$ が単射ならば f は単射である．

(2) $g \circ f$ が全射ならば g は全射である．

(3) Y の部分集合 W に対し，W の f による逆像 $f^{-1}(W)$ を

$$f^{-1}(W) = \{x \in X \mid f(x) \in W\}$$

と定める．Y の任意の部分集合 A, B について $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ が成り立つ．

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231323)

14.10 3次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad と \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 一次方程式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}$ を満たす x_1, x_2, x_3, x_4 をすべて求めよ．

(2) 4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ から 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ への写像 T を

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4$$

で定める．このとき，T は $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像であることを示せ．また，T の核空間の基底を求めよ．

(3) 前問 (2) の写像 T に対し，T の像空間の基底を求めよ．

(茨城大類 23)　　(固有番号 s231701)

14.11 次数が 2 以下の実係数多項式全体で構成される実線形空間 $P_2(R)$ において

内積 $\quad (f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \quad (f,g \in P_2(R))$

ノルム $\quad ||f|| = \sqrt{(f,f)}$

を定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = 1$ のとき，ノルム $||f||$ を求めよ．

(2) $f(x) = 1,\ g(x) = x$ のとき，内積 (f,g) を求めよ．

(3) 基底 $\{1, x, x^2\}$ からグラム・シュミットの直交化法により正規直交基底を求めよ．

(筑波大類 23) (固有番号 s231318)

14.12 X を空でない集合とし，R を X 上の同値関係とする．すなわち，R は直積集合 $X \times X$ の部分集合で，次の (i),(ii),(iii) を満たすとする．

(i) すべての $x \in X$ に対し，$(x,x) \in R$ である．

(ii) $(x,y) \in R$ ならば，$(y,x) \in R$ である．

(iii) $(x,y) \in R$ かつ $(y,z) \in R$ ならば，$(x,z) \in R$ である．

また，同値関係 R による $x \in X$ の同値類 $\{y \in X \mid (x,y) \in R\}$ を記号 $[x]$ で表す．

以下の各問に答えよ．

(1) すべての $x \in X$ に対し，$[x] \neq \emptyset$ であることを示せ．ただし．$\emptyset$ は空集合を表す．

(2) 次の命題が成り立つことを示せ．

$$(x,y) \in R \Longleftrightarrow [x] = [y]$$

(3) すべての $x, y \in X$ に対し，$[x] \cap [y] = \emptyset$ または $[x] = [y]$ が成り立つことを示せ．

(茨城大類 23) (固有番号 s231703)

14.13 f を集合 A から集合 B への写像とし，B の部分集合 C に対して集合 $\{x \in A \mid f(x) \in C\}$ を $f^{-1}(C)$ で表す，$A, B, C, f^{-1}(C)$ のどれも空集合でないとする．このとき，次の (1) および (2) に答えよ．

(1) $f\left(f^{-1}(C)\right) \subset C$ であることを示せ．

(2) f が全射ならば，$f\left(f^{-1}(C)\right) = C$ であることを示せ．

(茨城大類 24) (固有番号 s241703)

14.14 $V = R^3$ を R 上の 3 次元ベクトル空間とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，行列 A が定める V 上の線形変換を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in V)$ とする．次の問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は V の基底であることを示せ．

(2) V の基底 $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}f$ は V の部分空間であることを示せ．また，$\mathrm{Im}f$ の基底を一つ求めよ．

(金沢大類 23) (固有番号 s232205)

14.15 A, B を集合，$f : A \to B$, $g : B \to A$ を写像とする．合成写像 $f \circ g$ が全射，$g \circ f$ が単射であるならば．f も g も全単射であることを示せ．

(富山大類 23)　　(固有番号 s232302)

14.16 R^3 の 2 組の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ は

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad と \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

によって定義されている．このとき，次の問に答えよ．

(1) 基底 $A \to B$ の基底変換の行列 P を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の基底 $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関する座標は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき，
$\boldsymbol{\xi}$ の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ に関する座標を求めよ．

(3) 2 組の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関して，
同じ座標をもつ非零ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を求めよ．

(名古屋工業大類 24)　　(固有番号 s242907)

14.17 行列 A は 3 行 2 列の行列であり，その列ベクトルは $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ である．$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は線形独立であり，これらが張る部分空間を V とする．また，ベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ はいずれも 3 次元ベクトルであるが，$\boldsymbol{b}$ は大きさと向きが一定で V に含まれていないベクトル，$\boldsymbol{p}$ は V に含まれる任意のベクトル，$\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{p}$ の差を表すベクトル ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$) である．行列とベクトルの成分はすべて実数であるとして，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{p}$ は A と 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いて $\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{x}$ と表せることを示せ．

(2) $\boldsymbol{q}$ の大きさが最小となるとき，${}^tA\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ という関係が成り立つことを示せ．なお，${}^tA$ は A の転置，また，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す．

(3) $\boldsymbol{q}$ の大きさが最小となるときの問い (1) の $\boldsymbol{x}$，およびこのときの $\boldsymbol{p}$ をそれぞれ A と $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ．

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233504)

14.18 R^4 の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in R^4 \;\middle|\; b + c + d = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in R^4 \;\middle|\; a + b = 0,\ c = 2d \right\}$$

とする．このとき，W_1, W_2 のそれぞれの次元と一組の基底を求めよ．また，

$$W_1 \cap W_2\,, \quad W_1 + W_2$$

のそれぞれの次元と一組の基底を求めよ．

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233604)

14.19 k を実数として

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

とする．$\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．

(1) f の核 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元を求めよ．

(2) f の像 $W = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ．

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233802)

14.20 線形変換 $T : R^4 \to R^4$ を

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}\,, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 \in R)$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \in R^4 \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ を 1 組求めよ．

(2) $\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in R^4\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ を 1 組求めよ．

(3) (1), (2) で求めた $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立であることを証明せよ．

(神戸大類 23)　　(固有番号 s233810)

14.21 (1) $M_2(C)$ を複素数を成分とする 2×2 行列全体の集合とする，$M_2(C)$ は行列の足し算とスカラー倍により複素ベクトル空間になる．$M_2(C)$ の次元を求めよ．

(2) $A \in M_2(C)$ に対して写像 $f_A : M_2(C) \to M_2(C)$ を $f_A(X) = AX - XA$ で定める．このとき，f_A が線形写像になることを示せ．

(3) f_A の核の次元を求めよ．

(岡山大類 23)　　(固有番号 s234004)

14.22 次の行列 A が定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を一組求めよ．

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を一組求めよ．

(3) f を $\mathrm{Im}\, f$ に制限して得られる線形変換 $g : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ について, (2) で求めた基底に関する行列表示を求めよ．

(4) A の固有値をすべて求めよ．

(広島大類 23)　　(固有番号 s234106)

14.23 標準内積の入った線形空間 $\mathbb{R}^4$ における次のベクトルを考える.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_1, ベクトル $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_2 とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 部分空間 $W_1 + W_2$ の直交補空間の次元を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ.

(3) W_1 の直交補空間を $W_1^{\perp}$ とする. ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

の直和分解 $\mathbb{R}^4 = W_1 \bigoplus W_1^{\perp}$ に伴う分解を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \left(\boldsymbol{y} \in W_1\,,\ \boldsymbol{z} \in W_1^{\perp}\right)$$

とし, ベクトル $\boldsymbol{y}$ を $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ と表す. 実数 $a,\ b$ を $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ を用いて表せ.

(広島大類 23)　　(固有番号 s234107)

14.24 V を 3 次元実線形空間, W をその 2 次元部分空間とする. f は V の線形変換で, $f(W) \subset W$ を満たすとする. また, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は W の基底, $\boldsymbol{v}_3 \in V$ は W に属さないベクトルとする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は V の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を A とし, A の $(3,3)$ 成分を a とする. このとき, V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して, $f(\boldsymbol{v}) - a\boldsymbol{v} \in W$ であることを示せ.

(3) a は A の固有値であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{v} \notin W$ ならば, $f(\boldsymbol{v}) \neq a\boldsymbol{v}$ であるとする. このとき, A の固有多項式を $\Phi(t)$ とすれば, $\Phi(a) = \Phi'(a) = 0$ であることを示せ. ただし, $\Phi'(t)$ は $\Phi(t)$ の導関数である.

(広島大類 24)　　(固有番号 s244104)

14.25 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \\ \delta_{i,4} \end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{e}_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} i\boldsymbol{e}_k$ となっている. ただし, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ である. このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{e}_4)$ はどんなベクトルか, 成分表示せよ.

(2) $f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ f(\boldsymbol{e}_3),\ f(\boldsymbol{e}_4)$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}^4$ の基底を $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_4$ とするとき. f の表現行列 A を求めよ.

(4) A は正則であることを示せ.

(5) f の逆写像はあるか. あれば求め, 無ければその理由を述べよ.

(高知大類 23)　　(固有番号 s234504)

応用数学

15　応用数学

15.1　関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

とし, 関数 $F(\omega)$ のフリーエ逆変換 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

とするとき．次の設問に答えよ．ただし, $i = \sqrt{-1}$ であり，途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1)　関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が $e^{-a\omega^2}$ であるとき，もとの関数 $f(t)$ を求めよ．ただし,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を利用せよ．ここで，$a > 0$ である.

(2)　以下の関係式を満たす関数 $f(t)$ を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) f(\tau) d\tau = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(北海道大類 23)　　(固有番号 s230102)

15.2　以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1)　$w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,
$\alpha_k = a_k + ib_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$　とするとき，w の実部 $Re(w)$ および $Im(w)$ を求めよ.

(2)　$f(z) = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$　$(z = x + iy)$　が正則か否かを調べよ.

(3)　次の式を証明せよ.

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

(北海道大類 23)　　(固有番号 s230103)

15.3　定積分

$$I = \int_{o}^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\sin\theta} d\theta$$

について，以下の問いに答えよ.

(1)　$z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z で表せ．ただし，i は虚数単位である.

(2)　$I = \displaystyle\int_C f(z) dz$ の形に表せ．ここで，積分路 C は円 $|z| = 1$ を正の向きに一周するものとする.

(3)　I の値を求めよ.

(電気通信大類 23)　　(固有番号 s231005)

15.4 (1) 実数 α と β に対して，下記の等式を満たす複素数 z が複素平面上でどのような図形になるか示し，図示せよ．ただし，i を虚数単位とする．

$$\left|\frac{z+\alpha-\alpha i}{2z-\beta+\beta i}\right| = 2$$

(2) 複素関数

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

を考える．複素平面上において (p,q) を中心とする半径 $r(>0)$ の円を C とするとき，C が f により変換された像がどのような図形になるかを示せ．

(3) (1) の等式を満たす複素数 z に対して，複素平面上での z の図形と $f(z)$ の図形が一致するときの α と β を求めよ．

(東京大類 23)　　(固有番号 s230704)

15.5 複素数 $z = x+iy$ (i は虚数単位) に対して定義される複素関数 $f(z)$ は正則であり，その実部 $u = u(x,y)$，虚部 $v = v(x,y)$ は $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x,\ v(0,0) = 0$ を満たすという. 以下の問いに答えよ.

(1) $v(x,y)$ を求めよ. 必要があれば，$f(z)$ が Cauchy − Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことを用いてよい.

(2) $f(z)$ を求めよ.

(3) C を複素平面上の単位円周，C の向きを反時計回りとするとき，複素積分

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

の値を計算せよ.

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231303)

15.6 次のベクトルについて考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

(1) 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積が 50 のとき，z を求めよ.

(埼玉大類 23)　　(固有番号 s231405)

15.7 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $ft)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t \leqq 0) \\ 1 & (0 < t \leqq \pi) \end{cases}$$

(大分大類 23)　　(固有番号 s235103)

15.8 $\sin^2 t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大類 23)　　(固有番号 s235102)

15.9 次の設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ と逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ.

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{i})(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{j})(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}) + (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{k})(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j})$$

ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ, x 方向, y 方向, z 方向の単位ベクトルとする.

(新潟大類 23) (固有番号 s232002)

15.10 $(1-i)^{11} = a + bi$ を満たす実数 a, b を求めよ. ただし, i は虚数単位とする.

(静岡大類 23) (固有番号 s232505)

15.11 $\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{g}(t)$ は t を変数とする三次元ベクトル関数とする. 以下の問に答えよ. なお, $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}'$ と記すこととする.

(1) $\boldsymbol{f}(t)$ が長さ一定のベクトル関数である場合, $\boldsymbol{f}(t)$ と $\boldsymbol{f}'(t)$ は直交することを証明せよ. ただし, $|\boldsymbol{f}(t)| > 0$, $|\boldsymbol{f}'(t)| > 0$ とする.

(2) 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{g}(t)$ とするときに, 位置ベクトルが $\boldsymbol{g}'(t)$ となる点を点 B とする. もし, $\boldsymbol{g}(t)//\boldsymbol{g}''(t)$ が成り立つならば, 三角形 OAB の面積は t に依存しないことを証明せよ. ただし, $\boldsymbol{g}(t)$ は t に関して 2 階微分可能であるとし, O は原点とする. また, $(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \times \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}'$ の公式を用いてよい.

(名古屋大類 23) (固有番号 s232804)

15.12 複素数 z に関する方程式

$$z^4 + (1-a^2)|z|^4 - a^2\overline{z}^4 = 0 \quad (*)$$

について以下の問いに答えよ. ただし, $|z|$ は z の絶対値, $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す. また, a は ± 1 以外の実数とする.

(1) 恒等式 $|z|^2 = z\overline{z}$ が成り立つことを示せ.

(2) 方程式 $(*)$ の解を $z = x + iy$ (i は虚数単位, x, y は実数) と表すとき, x と y が満たす関係式を求めよ.

(3) 方程式 $(*)$ の $z = 0$ 以外の解のうち, 任意の 2 つの解を z_1, z_2 とするとき, $\arg(z_2) - \arg(z_1)$ が取りうる値を $-\pi \leq \arg(z_2) - \arg(z_1) < \pi$ の範囲ですべて求めよ. ただし, $\arg(z_1)$, $\arg(z_2)$ はそれぞれ z_1, z_2 の偏角を表す.

(4) $\dfrac{z_2}{z_1}$ は実数または純虚数となることを示せ.

(大阪大類 23) (固有番号 s233503)

15.13 次の各問に答えよ. ただし, 答えは, $x + yi$ の形 (x, y は実数, i は虚数単位) で表せ.

(1) $\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)^3$ を計算せよ.

(2) 次の方程式を満たす複素数 z をすべて求めよ.

$$z^2 + i = 0$$

(宮崎大類 23) (固有番号 s235302)

15.14 次の複素積分を考える.

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z-a)(z-b)^2}\,dz$$

ただし，積分路 C は単位円 $\{|z|=1\}$（反時計まわり）を表し，複素数 a, b は C 上にないものとする.

以下の場合について I の値を求めよ.

(1) $a \neq b$ のとき.

(2) $a = b$ のとき.

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233509)

15.15 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする．以下を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)\sin mx\,dx = 0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\ . \quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)p_n(mx)dx = a_0\int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n \to +\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)p(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(x)dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233510)

15.16 (1) $\omega = \exp z$ により，z 平面の直線 $x = A$（定数）が ω 平面で描く図形を説明せよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ．ただし，$|a| \neq 1$ とする.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\,\cos\theta + a^2}\,d\theta$$

(大阪府立大類 23)　　(固有番号 s233609)

15.17 直交座標系 $O - XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ と $\boldsymbol{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ により作られる三角形に余弦定理を適用して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積について，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ が成り立つことを示せ．ただし，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角であり，また $|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表し，$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}$ である.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ と定義される．これより，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ.

(鹿児島大類 23)　　(固有番号 s235403)

15.18 正の整数 N が 1 に較べて充分大きいとき，$N!$ は $(N\ln N - N)$ と近似できることを示せ．ただし，$\ln N = \log_e N$ である.

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235504)

15.19 3 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ についてのスカラー 3 重積 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ は，ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ で形成される平行六面体の体積に等しいことを示せ．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ はすべてが同一平面上にないものとする．

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235505)

15.20 3 つの異なるベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を 3 辺にもつ平行六面体の体積 V が

$$V = |\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$$

と表されることを示せ.

(室蘭工業大類 23)　　(固有番号 s235509)

15.21 複素関数 $w = e^{-z}$ について次の問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする.

(1) $w = u + iv$, $z = x + iy$　（ u, v, x, y は実数 ）とおくとき，u, v それぞれを x, y を用いて表しなさい.

(2) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい.

(和歌山大類 23)　　(固有番号 s236501)

15.22 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3 - 2z^2 + 4z - 8}$ について次の問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする.

(1) $f(z)$ の特異点をすべて複素平面上に図示しなさい.

(2) 円周 $|z + 1 + i| = 2$ に反時計回りの向きを与えたものを C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めなさい.

(和歌山大類 23)　　(固有番号 s236502)

確率統計

16　確率統計

16.1 正しく作られたサイコロを用いて，“ 3 の倍数が出るまでサイコロを振り続ける ”というゲームを行う．このとき以下の問題に答えなさい.

(1) ちょうど n 回目に 3 の倍数が出る確率を P_n と表す．このとき，以下の極限値を求めなさい.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P_n$$

(2) 3 の倍数が出たときに 100 円もらえるとすると，このゲームによる獲得金額の期待値を求めなさい.

(3) 3 の倍数が出たときにもらえる金額を，1 回目なら 100 円，2 回目なら $100(1+r)$ 円，3 回目なら $100(1+r)^2$ 円というように，サイコロを振る回数が増えるにしたがって $(1+r)$ 倍する．但し，$r > 0$ とする．このとき，このゲームによる獲得金額の期待値が有限な値になるためには，正の数 r は，ある範囲内 $0 < r < r_0$ にある必要がある．このような r_0 のうち，最も大きな値を求めなさい.

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231312)

16.2 3つの部品 A, B, C からなる機械 M がある．C は絶対に壊れないが一定の確率で誤動作する．A, B は，C の誤動作のみを原因として一定の確率で C の誤動作と同時に壊れる．C が誤動作したことにより A, B が壊れる確率はそれぞれ 6 %, 5 % である．B が壊れたときに，同時に A も壊れる確率は 20 % である．A, B のいずれか，もしくは両方が壊れた場合に限り M は必ず故障し修理工員が修理する．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，解の導出過程を必ず書くこと．

(1) (a) C が誤動作したときに M が故障する確率 P_r を求めよ．
　(b) C が誤動作する確率が 10 % のとき M が故障する確率を求めよ．

(2) C の 3 回の誤動作に対して，M の故障が 2 回以上となる確率を求めよ．

(3) C の誤動作が n 回発生したとき M を修理した回数 X の平均を μ，標準偏差を σ とする．n が十分大きい場合について X が $\mu \pm 2\sigma$ の範囲に入る確率を，標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\varphi(z) = P(Z \leqq z)$ を用いて示せ．ただし，二項分布に従う確率変数 Y は，試行回数が十分大きい場合，近似的に正規分布 $N(Y$ の平均，Y の分散$)$ に従うことを利用せよ．

(4) M が故障するたびに，2 人の修理工員 F_1 と F_2 が交互に修理する．実際に修理を行った後，修理担当を交代する．最初の修理担当を F_1 としたとき，C が n 回誤動作した時点で修理担当が F_1 である確率を求めよ．ただし，$n \geqq 1$ とする．

(5) M が故障しているか否かを判断するセンサー S_1 と S_2 を取り付けた．センサー S_1，S_2 が M の故障の有無を正しく判断する確率は独立であり，それぞれ 90 %, 80 % である．今，C が誤動作し，M について S_1 が故障していると判断し，S_2 が故障していないと判断した．このとき，M が故障している確率を求めよ．

(東京大類 23)　　(固有番号 s230702)

16.3 次の各問いに答えなさい．

(1) サイコロを 3 回振るとき 1 の目が出る回数を X とする．X の確率分布表を示しなさい．

(2) 確率変数 X が $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ （ $\lambda > 0$, k は 0 以上の整数 ）で与えられる確率分布に従うとき，次の各問いに答えなさい．
　(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$ を示しなさい．
　(b) 確率変数 X の平均が λ であることを示しなさい．

(和歌山大類 23)　　(固有番号 s236503)

16.4 1 から 6 までの目のあるさいころを A と B の 2 人がそれぞれ 1 回ずつ振り，そのとき出た目の大きい方を勝ちとし，同じ目なら引き分けとする．

(1) A が 3 の目を出して勝つ確率を求めよ．

(2) A が勝ったとき，A の目が 3 である確率を求めよ．

(新潟大類 23)　　(固有番号 s232015)

16.5 箱の中に数字 1 が書かれたカード 1 枚と，数字 2 が書かれたカード 1 枚が入っている．この箱から 1 枚のカードをでたらめに取り出して数字を確かめてから元に戻す．この試行を繰り返し行い，取り出したカードの数の和が 3 以上になったとき試行を終了し，そのときの和を X とする．以下の問に答えなさい．

(1) $X = 4$ となる確率を求めなさい．

(2) X の期待値を求めなさい．

(長岡技科大類 23)　　(固有番号 s232101)

16.6 以下の問いに答えよ. 答えは既約分数で示せ.

(1) 4 人でジャンケンをする. それぞれが, グー, チョキ, パーを出す確率は等しいものとする. 1 回ののジャンケンで勝者 1 人が決まる確率を求めよ.

(2) つぼの中に白い玉 5 個と黒い玉 5 個が入っている. このつぼから無作為に一度に 4 個の玉を取り出したとき, 取り出した白い玉と取り出した黒い玉の個数がちがう確率を求めよ.

(3) つぼの中に玉が 4 個入っており, そのうち白い玉が何個であるかは分からないとする. このつぼから玉を 1 個取り出したところ, 白い玉であったという. もともとつぼの中に白い玉が 3 個入っていた確率を求めよ.

(豊橋技科大類 23)　　(固有番号 s232701)

16.7 以下の 2 つの問に答えよ.

(1) 9 人のスタッフを 2 人のグループ, 3 人のグループ, 4 人のグループの 3 つのグループに分ける分け方は何通りあるか.

(2) 12 台のカメラがあり, このうち 2 台が故障しているとする. 12 台のカメラから 3 台のカメラを無作為に取るとき, 少なくとも 1 台の故障したカメラが含まれる確率を求めよ.

(群馬大類 23)　　(固有番号 s231504)

16.8 　中の見えない袋が 10 袋あり, それぞれに 10 個の玉が入っている. 袋にはタイプA, タイプB, タイプCの 3 種類があり, タイプAは 2 袋, タイプBは 7 袋, タイプCは 1 袋であることが分かっている. ここでタイプAには白玉が 9 個, 赤玉が 1 個入っている. タイプBには白玉が 7 個, 赤玉が 3 個入っている. タイプCでは白玉が 5 個, 赤玉が 5 個入っている. このとき以下の問いに答えよ. ただし答えは分数で示すこと.

(1) 袋を無作為に一つ選び, 玉を無作為に一つ取り出す. その袋がタイプAであり, かつ取り出された玉が白玉である確率を求めよ.

(2) 袋を無作為に一つ選ぶ. その袋に対して, 玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行う. このとき, その袋がタイプAであり, かつ取り出された玉が 3 回とも白玉である確率を求めよ.

(3) 袋を無作為に一つ選ぶ. その袋に対して, 玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行う. このとき, 取り出された玉が 3 回とも白玉である確率を求めよ.

(4) 袋を無作為に一つ選び, その袋に対して, 玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行った. 取り出された玉は 3 回とも白玉であった. このとき, この袋がタイプCであった確率を求めよ.

(豊橋技科大類 24)　　(固有番号 s242701)

16.9 箱の中に 1 から 8 までの整数を記入した 8 枚のカードが入っている. この箱から任意にカードを 1 枚取り出し, その数字を調べてからもとの箱に戻す. これを 3 回繰り返し, 取り出したカードの数字の最大値を X とする.

(1) $X \leqq 4$ となる確率を求めよ.

(2) $k = 1, 2, 3, \cdots .8$ として, $X = k$ となる確率を求めよ.

(3) 数列の和に関する下記の等式について, 数学的帰納法を用いて証明せよ. n は自然数を示す.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

(4) (3) の等式を参照して X の期待値を求めよ.

(三重大類 23)　　(固有番号 s233104)

16.10 確率変数 X は 0 または 1 の値をとり $P(X=1)=1-P(X=0)=p\ (0<p<1)$ であるとする．また，$X=x\ (x=0,1)$ が与えられたときの確率変数 Y の条件付き分布がそれぞれ以下の二項分布であるとする（m は正の整数，$0<q_0<q_1<1$）．

$$P(Y=y\,|\,X=0)={}_mC_y{q_0}^n(1-q_0)^{m-y}\quad (y=0,1,2,\cdots,m)$$

$$P(Y=y\,|\,X=1)={}_mC_y{q_1}^n(1-q_1)^{m-y}\quad (y=0,1,2,\cdots,m)$$

ここで ${}_mC_y=\dfrac{m!}{y!(m-y)!}$ は二項係数である．

(1) $Y=y\ (y=0,1,2,\cdots,m)$ が与えられたとき，$X=1$ となる条件付き確率 $P(X=1\,|\,Y=y)$ を求めよ．

(2) $P(X=1\,|\,Y=y)>p$ となるような y の範囲は p によらないことを示せ．

(3) $m=10,\ q_0=\dfrac{1}{2},\ q_1=\dfrac{3}{4}$ のとき，$P(X=1\,|\,Y=y)>p$ となるような y の値をすべて求めよ．ただし，$\dfrac{\log 2}{\log 3}=0.631$ とする．

(大阪大類 23)　　(固有番号 s233511)

16.11 離散型確率変数 X が m 個の値 $x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_m$ を取り，それぞれの値を取る確率を $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m$ とする $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}p_i=1\right)$． 確率変数 X の期待値を $E(X)=\mu$ とすると，確率変数 X の分散 $V(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2p_i$ を $V(X)=E(X^2)-\mu^2$ と記すことができることを示せ．

(長崎大類 23)　　(固有番号 s235018)

16.12 制限時間 1 時間のテストに対して，一人の学生がそれを解答するまでに要する時間を y とする．このとき，y は，次の確率密度関数に従う確率変数であるとして，以下の問題に答えなさい．

$$f(y)=\begin{cases} cy^2+y\ , & 0\le y\le 1 \\ 0\ , & \text{その他}\end{cases}$$

(1) c を求めなさい．

(2) 分布関数 $F(y)$ を求めなさい．

(3) $f(y)$ と $F(y)$ のグラフを描きなさい．

(4) $F(y)$ において，$F(-1),F(0),F(1)$ を求めなさい．

(5) 30 分以内に解答を終了する確率を求めなさい．

(筑波大類 23)　　(固有番号 s231313)