大学編入学試験問題集（数学）

群馬工業高等専門学校数学科

2026 年 2 月

目 次

基礎数学

1　基礎数学

1.1　以下の問いに答えよ.

(1)　集合 $A,\ B,\ C$ に対して,

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (S \cap C)$$

を示せ.

(2)　$\emptyset$ を空集合とする．$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ とし，実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して $B(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x - a \leq 1\}$ とする．$A \cap B(a) = \emptyset$ となるような a の範囲を求めよ.

(3)　$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$，$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 5y + 4 = 0\}$，$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$ とする．$A \cap B \cap C$ の要素の個数を求めよ.

(筑波大 2025)　　(m20251315)

1.2　次の文章を読んで，(1)，(2)，(3)，(4)，(5) に答えよ.

方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ を満たす正の整数の組 (x, y) を見つけたい．ただし，正の整数に 0 が含まれないことに注意せよ.

(1)　この方程式を満たす組 (x, y) を 1 つ見つけよ.

(2)　$(x, y) = (a, b)$ と $(x, y) = (c, d)$ が $x^2 - 2y^2 = 1$ を満たすとする．このとき $(x, y) = (ac + 2bd,\ ad + bc)$ が方程式を満たし，かつ (a, b)，(c, d) とは異なる組であることを示せ.

(3)　(1) とは別の解で，$1 \leqq x \leqq 100$ かつ $1 \leqq y \leqq 100$ を満たすものを 2 組見つけよ.

(4)　方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ を満たす正の整数の組 (x, y) は無数に存在することを示せ.

(5)　正の整数 x, y が $x^2 - 2y^2 = 1$ を満たすならば，x は 3 以上の奇数かつ y は偶数であることを示せ.

(群馬大 2025)　　(m20251501)

1.3　次の命題について，小問に答えよ.

「任意の整数 $n \geqq 2$ に対して，$5^{2^{n-2}} - 1$ は 2^n で割り切れるが 2^{n+1} では割り切れない」

(1)　$5^{2^{n-2}} = 1 + q_n 2^n$ と表したとき，命題と同値な q_n の条件を答えよ.

(2)　任意の整数 $n \geqq 2$ に対して (1) の q_n の条件が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ.

(岐阜大 2025)　　(m20252604)

1.4　放物線 $C : x^2 = -2py$ は二次元空間 $x,\ y$ 上の点 $S : (2, -1)$ を通る．以下の問いに答えなさい.

(1)　p の値を求めなさい.

(2)　放物線 C の焦点 F の座標を求めなさい.

(3)　放物線 C の焦点 F を通る傾き $a > 0$ の直線 L と放物線 C の二つの交点を $M : (x_1,\ y_1)$ と $N : (x_2,\ y_2)$ とする時，x_1 と x_2 の積を求めなさい.

(山口大 2025)　　(m20254303)

微分積分 I

2　微分

2.1　以下の極限値を求めよ.

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-2^x}{x}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{x-1}\right)$

(お茶の水女子大 2025)　　(m20250607)

2.2　以下の極限値を求めよ.

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 5x}{x^2}$

(筑波大 2026)　　(m20261301)

2.3　(1)　次の極限を求めよ.

(a)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tanh x$　　(b)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan^{-1}x}$

(2)　次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(a)　$y=(\sin x)^x$　　(b)　$\begin{cases} y=\theta-\sin\theta \\ x=1-\cos\theta \end{cases}$

(福井大 2025)　　(m20252401)

2.4　次の関数を微分せよ.

(1)　$y=\dfrac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(2)　$y=(3x-5)\sqrt{7-2x}$

(3)　$y=\log\sqrt{\dfrac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}}$

(4)　$y=e^{ax}\cos bx$

(福井大 2025)　　(m20252416)

2.5　関数に関する以下の問いに答えなさい.

(1)　次の関数の導関数を求めなさい.
$y=e^{\sin x}$

(2)　次の関数の導関数を求めなさい.
$y=x\log x-x$

(3)　$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ (0<t<2\pi)$ の時，関数 $y=y(x)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t を用いて表しなさい.

(三重大 2025)　　(m20253106)

2.6　$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ について考える.

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形を描け．各軸との共有点や，極値をとる点があれば，その座標を示すこと．

(京都大 2025)　　(m20253301)

2.7 次の極限が 0 でない値に収束するような，自然数 n の値を求めよ．また，その場合の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x^n}$$

(京都大 2025)　　(m20253302)

2.8 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2^{x^2} - \cos x}{\tan^2 x}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2025)　　(m20253402)

2.9 次の関数の第 101 次導関数を求めよ．ただし，$-\pi < x < \pi$ とする．

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(x)}$$

(広島大 2026)　　(m20264101)

2.10 $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ とおく．また，n を自然数とする．

(1) $(1 + x^2)f''(x) + xf'(x) = 0$ を示せ．

(2) $f(x)$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表す．次の等式が成り立つことを示せ．
必要ならば，ライプニッツの公式を証明なしに用いてよい．

$$(1 + x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n + 1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

(愛媛大 2025)　　(m20254604)

2.11 以下の微分を計算せよ;

(1) $\dfrac{d}{dx} e^{\sqrt[3]{x}}$　　(2) $\dfrac{d}{dx} \tan x \cos^2 x$

(鹿児島大 2025)　　(m20255401)

2.12 以下を計算せよ．

(1) $\dfrac{d}{dx} \log_e \left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx}(x \log_e x - x)$

(鹿児島大 2025)　　(m20255406)

2.13 $f(x) = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + x\cos^2 x$ とする．$\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい．
ただし，$a > 0$ とする．

(鹿児島大 2025)　　(m20255411)

2.14 $f(x) = x\cos^2 x + e^{\cos 2x}$ とする．$\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい．

(鹿児島大 2025)　　(m20255416)

2.15 高さ 20 m の岸の上の地点 A から，綱で船 B を毎秒 1 m の速さで岸に引きよせるとする．この場合，AB$= 40$ m になったときの船の速さを求めなさい．

(鹿児島大 2025)　　(m20255421)

2.16 底面が直径 a の円である円錐がある．この円錐の直径，高さの合計が A（一定）のとき，最大となる円錐の体積を A を用いて示しなさい．ただし，円周率は π で表しなさい．

(鹿児島大 2025)　　(m20255426)

2.17 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

(香川大 2025)　　(m20255701)

2.18 $\displaystyle\lim_{x \to 0,\, x>0} x^{\sin x}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x \to 0,\, x>0}$ は右側極限値を表す．

(はこだて未来大 2025)　　(m20256302)

3 積分

3.1 関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ を $\sin x$ の逆関数とし，以下の問いに答えなさい．
ただし，$-1 \leq x \leq 1,\ -\dfrac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ の第 1 次導関数 $f'(x)$ と第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ を求めなさい．

(3) 曲線 $y = xf(x)$ の増減表を作成し，曲線 y の概形を描きなさい．

(4) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2025)　　(m20250304)

3.2 次の (1)〜(3) の定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\ \sin^2\theta\ d\theta$

(3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$

(秋田大 2025)　　(m20250401)

3.3 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+2\sin\theta}d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

(お茶の水女子大 2025)　　(m20250604)

3.4 以下の問いに答えよ．

(1) 次の有理関数の不定積分を求めよ．

$$\frac{7}{2x^2+5x-3}$$

(2) 次のカテナリー（懸垂線）の長さを求めよ．ただし，$0 \leq x \leq a$ とする．

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

(筑波大 2025)　　(m20251301)

3.5 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx$ 　$(m, n$ ： 正の整数)

(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

(福井大 2025)　　(m20252402)

3.6 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(4+x^3)}dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x} dx$

(福井大 2025)　　(m20252417)

3.7 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x}dx$

(福井大 2025)　　(m20252418)

3.8 実数 $x \geq 0$ の関数 $f(x)$ を以下の式で定める.

$$f(x) = \int_1^\infty t^{-2}(\log t)^x dt$$

次の問に答えよ.

(1) $f(0)$, $f(1)$ の値を求めよ.

(2) 次の式が成り立つことを示せ.

$$f(x+1) = (x+1)f(x)$$

(3) 変数変換 $t = e^{s^2}$ を行うことにより，関数 $f(x)$ を変数 s に関する積分で表せ.

(4) $\{f(1.5)\}^2$ の値を求めよ.

(岐阜大 2025)　　(m20252602)

3.9 次の不定積分を求めよ.

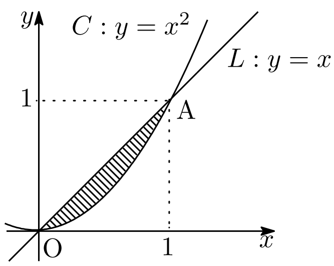
$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

(名古屋工業大 2025)　　(m20252902)

3.10 x-y 平面上の放物線 $y = x^2$ を C, 直線 $y = x$ を L とする.

(1) 放物線 C と直線 L により囲まれた図形を直線 L を軸として回転させる．この回転体の体積を求めなさい.

(2) 放物線 C と直線 L の交点は $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,1)$ である．点 O から点 A までの放物線の長さを求めなさい.



(三重大 2025)　　(m20253103)

3.11 関数に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 次の関数の不定積分を求めなさい.

$$\int te^{-t^2}dt$$

(2) 次の関数の不定積分を求めなさい.

$$\int \frac{1}{x^3-x}dx$$

(三重大 2025) (m20253107)

3.12 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$

(京都大 2025) (m20253308)

3.13 定積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{4x^4+3x^2-1}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2025) (m20253403)

3.14 $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2(x+1)}$ の不定積分を求めよ.

(広島大 2025) (m20254101)

3.15 x 軸, y 軸および曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ によって囲まれた部分の面積を求めよ.

(広島大 2025) (m20254102)

3.16 自然数 $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$I_n=\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) I_1 を求めよ.

(2) n を自然数とする. 定積分

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx$$

を I_n と I_{n+1} を用いて表せ.

(3) 任意の自然数 n に対して

$$I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left\{\frac{1}{2^n}+(2n-1)I_n\right\}$$

が成り立つことを示せ.

(4) n は自然数とする. 定積分

$$A=\int_0^{\pi/4}\cos^{2n}x\,dx \quad と \quad B=\int_0^{\pi/4}(\sin x+\cos x)^{2n}dx$$

を n と I_{n+1} を用いて表せ.

(広島大 2025) (m20254107)

3.17 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ を求めよ.

(高知大 2025)　　(m20254505)

3.18 a を正の実数とし，$f(x) = |x|e^{-x}$ とおく．曲線 C_1，C_2 を以下で定める.

$$C_1 : y = f(x), \qquad C_2 : y = 3e^{-4a} f(x - 4a)$$

曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S とする．以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ.

(2) C_1 と C_2 の交点の x 座標をすべて求めよ.

(3) S を a を用いて表せ.

(4) $a > 0$ の範囲で，S が最大となる a の値を求めよ.

(愛媛大 2025)　　(m20254603)

3.19 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ を考える.

(1) $x = \pi - t$ と置換することにより，$I = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$ を示せ.

(2) 定積分 I の値を求めよ.

(愛媛大 2025)　　(m20254605)

3.20 関数

$$f(x) = \int_0^1 \left| e^{t-x} - 1 \right| dt \qquad (0 \leq x \leq 2)$$

を考える.

(1) $x = 1/2$ として，被積分関数 $g(t) = \left| e^{t-x} - 1 \right|$ の概形を $-2 \leq t \leq 2$ の範囲で図示せよ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ.

(九州大 2025)　　(m20254703)

3.21 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^e 4x \log_e x \, dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$

(鹿児島大 2025)　　(m20255402)

3.22 以下を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x} dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

(鹿児島大 2025)　　(m20255407)

3.23 不定積分 $\displaystyle\int (e^{-2x+3} + \sin^2 x) \, dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2025)　　(m20255412)

3.24 点 O を原点とする直交座標系における 2 つの曲線 $y = \cos x$ と $y = \sin 2x$ について，
以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leq x \leq \pi$ とする.

(1) 2 つの曲線のグラフを解答用紙の図 1 に示し，2 つの曲線の交点をすべて求めなさい.

(2) 曲線 $y=\cos x$ 上の $x=\dfrac{\pi}{2}$ の点における接線と曲線 $y=\cos x$ および y 軸で囲まれる領域の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2025)　　(m20255415)

3.25 不定積分 $\displaystyle\int(\sin^2 x\cos x+x\sin x)\,dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2025)　　(m20255417)

3.26 点 O を原点とする xy 直交座標系における曲線 $y=e^{-x}$ について,

以下の問いに答えなさい．ただし，以下の問いで a を $a\geqq 0$ の実数とする.

(1) 曲線上の $x=a$ の点における接線の式を求めなさい．そして，曲線と接線のグラフを解答用紙の図 1 に描きなさい

(2) 曲線上の $x=a$ の点における接線と x 軸および y 軸で囲まれた領域の面積を求めなさい．そして，その面積が最大となるときの a の値と面積を求めなさい.

(鹿児島大 2025)　　(m20255420)

3.27 以下の問いに答えよ.

(1) $\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ を x で微分せよ.

(2) 次の不定積分を求めよ．なお，(1) の解答が利用できる場合は利用してもよい.

(a) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$　　(b) $\displaystyle\int\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$

(3) 極座標平面において $r=a\theta$ と表される曲線について考える．ただし，$a>0$ とする．なお，(2) の解答が利用できる場合は利用してもよい.

(a) $0\leq\theta\leq 2\pi$ における曲線の長さ L を求めよ.

(b) $0\leq\theta\leq 2\pi$ において，動径（原点と曲線上の点を結ぶ線分）が通過する面積 S を求めよ.

(東京都立大 2025)　　(m20255906)

3.28 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と変数変換し，$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{3}{5-4\cos x}dx$ を求めよ.

(はこだて未来大 2025)　　(m20256304)

微分積分 II

4 級数

4.1 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=1$ および次の漸化式で定める.

$$a_{n+1}=3-\frac{1}{a_n+3}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

(1) すべての正の整数 n に対して $0<a_n<3$ となることを示せ.

(2) $\{a_n\}$ は単調増加な数列であることを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ.

(お茶の水女子大 2025)　　(m20250601)

4.2 以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} > \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x}$$

(2) (1) の不等式と次の不等式

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \frac{2}{n\pi}$$

が成り立つことを用いて，次の広義積分が無限大に発散することを示せ．

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

(筑波大 2025)　　(m20251304)

4.3 区間 $[0, u]$ 上で定義された次の連続関数 $f(x)$, $g(x)$ を考える．

$$f(x) = \left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{\beta + x^2}}\right)^{-1}, \qquad g(x) = x - f(x)$$

ただし，α, β は正の定数である．また，$f(u) < u$ であると仮定する．

(1) 区間 $(0, u)$ において $0 < f'(x) < \dfrac{u}{\sqrt{\beta + u^2}}$ である．このことを示せ．

(2) $g(x) = 0$ を満たす $x = x^*$ が区間 $(0, u)$ に存在し，かつ，そうした x^* が唯一であることを示せ．

次に，区間 $(x^*,\ u]$ 内の任意の初期値 x_0 から次のようにして生成される数列 $\{x_n\}$ を考える．

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

(3) $x^* < x_{n+1} < x_n$ であることを示せ．

(4) 数列 $\{x_n\}$ が極限値を持ち，かつ，その極限値が x^* となることを示せ．

(筑波大 2025)　　(m20251309)

4.4 円周率 π の近似値を求めることを考える．

(1) 関数 $f(x) = (1 + x)^a$ のマクローリン展開を 2 次の多項式と剰余項の和の形式で示せ．ただし，a は定数である．

(2) (1) で求めた関係式を利用して関数 $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$ のマクローリン展開を求め，さらに両辺を 0 から定数 b $(0 \leq b \leq 1)$ まで積分せよ．ただし，剰余項の積分は $E(b)$ としてよい．

(3) (2) で求めた関係式に $b = \dfrac{1}{2}$ を代入し，$E(b)$ を無視することにより，円周率 π の近似値を求めよ．なお，解答は分数で表せ．

(筑波大 2026)　　(m20261307)

4.5 以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \cos x$ の 3 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_4(x)$ を求めよ．

(2) $g(x) = \tan^{-1} x$ の 3 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $S_4(x)$ を求めよ．
ただし，$\tan^{-1} x$ は $\tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2x - \tan^{-1} x - x\cos x}{x^3}$ を求めよ．

(信州大 2026)　　(m20261901)

4.6 $(a_n)_{n=1,2,\cdots}$, $(b_n)_{n=1,2,\cdots}$ を収束する実数列とする．次の問いに答えよ.

(1) 実数 α に対して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることの定義を述べよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ であることを示せ.

(富山大 2026)　　(m20262301)

4.7 関数 $f(x) = e^{-x^2} - x\sin x$ に対し，$f(x)$ のマクローリン展開を x^4 の項までで打ち切って得られる高々 4 次の多項式 $g(x)$ を求めよ.

(名古屋工業大 2025)　　(m20252901)

4.8 a を 1 より大きい実数とする．以下の問いに答えよ.

(1) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{-nx}$ が収束するようなすべての実数 x のなす集合 I を求めよ.

(2) I を (1) のものとし，$f : I \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-nx} \qquad (x \in I)$$

で定める．次の (i), (ii) に答えよ.

(i) I 上で f の導関数 f' を求めよ.

(ii) I 上で f の原始関数を 1 つ求めよ.

(3) 実数 b, c は $0 < b < c$ を満たすとする．このとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na^{-nx}$ が閉区間 $[b, c]$ で一様収束することを示せ.

(広島大 2025)　　(m20254105)

4.9 $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とする．以下の等式を満たす 4 つの定数 a_0, a_1, a_2, a_3 をすべて求めよ.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

ただし，記号 o はランダウのスモールオーである.

(はこだて未来大 2025)　　(m20256303)

5 偏微分

5.1 原点以外で定義された 2 変数実数値関数 f は，0 でない任意の実数 t に対して $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ をみたすとき，k 次の同次関数と呼ばれる.

(1) $g(x, y) = \dfrac{x^5 - 3y^5}{x^2 + y^2}$ が同次関数であることを示し，その次数を求めよ.

(2) f が C^1 級で k 次の同次関数のとき，次の式を示せ.

$$\left\{ x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right\} f(x, y) = kf(x, y)$$

(お茶の水女子大 2025)　　(m20250602)

5.2 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ を実数とし，関数 $P(x,y)=a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2$ を考える．次の極限値が存在するための $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ についての必要十分条件を求めよ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{P(x,y)}{x^2+y^2}$$

(東京工業大 2025)　　(m20250802)

5.3 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+3x^2y+3xy^2+3y^2-3x-3y$ について次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2025)　　(m20250901)

5.4 2 変数関数 $f(x,y)=(2x^2-y^2)e^{x+y}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ のマクローリン展開における x^3y^3 の係数を求めよ．

(2) 曲線 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,-1,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の偏導関数を $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ とする． $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす (x,y) をすべて求めよ．

(4) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(電気通信大 2025)　　(m20251003)

5.5 関数 $z=\exp\left(-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$ が描く曲線 S において，点 $(1,1,e^{-1})$ における接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2025)　　(m20251303)

5.6 次の関数を考える．ただし，e はネイピア数である．

$$f(x,y)=e^{\alpha x}\sin(\beta y)\qquad(\alpha\neq 0,;\beta\neq 0)$$

(1) 関数 $z=f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における接平面を求めよ．

(2) 関数 $z=f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における テイラー展開を 3 次の項まで求めよ．

次の関数を考える．

$$g(x,y)=-x^2-\frac{1}{4}y^2+4x+\frac{1}{2}y-\frac{17}{4}$$

(3) 関数 g の勾配とヘッセ行列を示せ．

(4) 関数 g のヘッセ行列の定値符号（正定値，負定値，不定値のいずれか）を答えよ．その理由も述べること．

(5) 関数 g の極値を求めよ．

(筑波大 2025)　　(m20251310)

5.7 以下の問いに答えよ．

(1) $x^2+xy+y^2=1$ を満たす実数 $x,\ y$ の有界閉集合に関して，$f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $f(x,y)=xy$ に関して (1) で求めた最大値をとる (x,y) のうち $x>0$ となるものを $(x_0,\ y_0)$ とおく．曲線 $x^2+xy+y^2=1$ の $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を答えよ．

(筑波大 2026)　　(m20261302)

5.8　以下の関数 $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

(筑波大 2026)　　(m20261308)

5.9　$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^4}{(x^2+y^2+1)^2}$$

と定義する．以下の問いに答えよ.

(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ を満たす $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ を求めよ.

(2)　$f(x,y)$ の最大値を求めよ.

(3)　任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，$f(x,y)\geq\alpha$ が　成り立つような実数 α の最大値を求めよ.

(筑波大 2026)　　(m20261314)

5.10　次の極限を調べ，それが存在する場合は極限値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ.
ただし，$a,\ b>0$ は定数とし，$\sin^{-1}x$ は $\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする.

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$　　(3)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(信州大 2025)　　(m20251901)

5.11　$g(t)$ を区間 $(-\infty,\infty)$ 上の微分可能な 1 変数実数値関数とする．実数 x と y に対し

$$f(x,y)=\int_{x-y}^{x+y}g(t)dt$$

とする.

(1)　偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ と $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ をそれぞれ g を用いて表せ.

(2)　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ を示せ.

(3)　$f(0,y)=\arctan y$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ をみたす関数 $f(x,y)$ を一つ求めよ．ただし，arctan は，関数 $\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す.

(信州大 2025)　　(m20251907)

5.12　関数 $f(x,y)=\cos x+\sin y\ \ (0<x<2\pi,\ 0<y<2\pi)$ について答えよ.

ア．　偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ.

イ．　$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) を全て求めよ.

ウ．　$f(x,y)$ の極値を求めよ.

(豊橋技科大 2025)　　(m20252702)

5.13 次の関数が原点 $(0,0)$ において極値をとるかどうかを，それぞれ判定せよ．なお，極値をとる場合については極大・極小の区別を明示すること．

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1+x^2-y^2)\cos(3x-2y) \\ g(x,y) &= x^2+4xy^3+5y^6 \end{aligned}$$

(名古屋工業大 2025)　　(m20252903)

5.14 xy 平面上の関数

$$f(x,y)=x^2y^2-4x^3-4xy+8x$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ が極小値をとるような xy 平面の点 (x,y) をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2025)　　(m20253404)

5.15 0 でない実数 a,b および 2 変数関数 $f(x,y)=xe^{-ax}+ye^{-by}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の停留点を，a,b を用いて表せ．ただし，停留点とは関係式 $f_x=0$，$f_y=0$ をともに満たす点のことである．

(2) 関数 $f(x,y)$ が極大値をもつための a,b に関する必要十分条件を求め，また極大値をもつ場合の極大値を求めよ．

(神戸大 2025)　　(m20253803)

5.16 $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)\sin y}{\sqrt{x^4+y^4}} & \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\big) \\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big) \end{cases}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) f が点 $(0,0)$ で連続であることを示せ．

(2) 任意の実数 $x\neq 0$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ を求めよ．

(3) f が点 $(0,0)$ で偏微分可能であるか否かを答え，それを証明せよ．

(4) f が点 $(0,0)$ で全微分可能であるか否かを答え，それを証明せよ．

(広島大 2025)　　(m20254109)

5.17 2 変数関数 $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$ について考える．

(1) 不等式 $x^2-y^2 \geqq 0$ の表す領域を座標平面上に図示せよ．

(2) 偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f_x(x,0)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-0} f_x(x,0)$ の値をそれぞれ求めよ．

(宮崎大 2025)　　(m20255304)

5.18 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ とする．

(1) $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(2,-1,2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(滋賀県立大 2025)　　(m20256001)

6 重積分

6.1 領域 $D = \left\{\ (x,y)\ \middle|\ 2 \leqq xy \leqq 4,\ x^2 \leqq y \leqq 3x^2\ \right\}$ において関数 $f(x,y) = x^3 + y^3$ について，以下の問に答えよ.

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = y/x^2$ について，ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

(東北大 2025) (m20250504)

6.2 xy 平面の領域 D_1 と D_2 を

$$D_1 = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 16\right\}. \qquad D_2 = \left\{(x,y)\ \middle|\ (x-1)^2 + 2(y-1)^2 < 2\right\}$$

とし，D_1 から D_2 を取り除いてできる領域を D とする．次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

(東京工業大 2025) (m20250801)

6.3 xyz 空間において，曲線 $z = e^{-x^2-4y^2}$ と平面 $z = e^{-4}$ で囲まれた図形の体積を求めなさい．ただし，e は自然対数の底である.

(東京農工大 2025) (m20250902)

6.4 次の重積分の値を求めよ.

$$I = \iint_D \sin(\pi y^2)dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq 1)\right\}$$

(電気通信大 2025) (m20251004)

6.5 2 つの曲線 $y = x$ と $y = x^2$ で囲まれた領域を D とする．このとき次の二重積分を求めよ.

$$\iint_D xydxdy$$

(筑波大 2025) (m20251302)

6.6 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\ (t \in \mathbb{R})$, $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\ (t \in \mathbb{R})$ について，

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

を示せ.

(2) 関数 $\tanh t = \dfrac{\sinh t}{\cosh t}\ (t \in \mathbb{R})$ の逆関数を求めよ.

(3) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ \middle|\ 0 \leq y \leq x/2,\ x^2 - y^2 \leq 1\right\}$ と定義する．このとき，重積分

$$\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 - y^2)^2}dxdy$$

を求めよ.

(筑波大 2025) (m20251314)

6.7 次式に示される領域 D の体積を重積分を用いて求める．

$$D=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2\le 1,\ 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z\right\}$$

ここで x,y,z について，次のように変数変換して考える．

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=2r\cos\theta\quad(r\ge 0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi)$

(1) $(r,\ \theta,\ \varphi)$ から (x,y,z) への変数変換のヤコビ行列 J を求めなさい．

(2) $(r,\ \theta,\ \varphi)$ から (x,y,z) への変数変換のヤコビアン $|J|$ を求めなさい．

(3) (2) で求めた $|J|$ を用いて，領域 D の体積を求めなさい．途中の計算も記述すること．

(筑波大 2025)　　(m20251316)

6.8 関数

$$f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)$$

について，以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 次偏導関数および 2 次偏導関数を求めなさい．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値の有無を調べ，極値がある場合はそれを与える x,y と $f(x,y)$ の値をそれぞれ求めなさい．

(3) 領域

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2\le 1\right\}$$

における関数 $f(x,y)$ の重積分

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy$$

を極座標変換を用いて求めなさい．

(筑波大 2026)　　(m20261311)

6.9 以下の重積分を計算せよ．

$$\iint_D(x^2+2y^2)dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\le 4\right\}$$

(筑波大 2026)　　(m20261316)

6.10 実 2 変数関数

$$f(x,y)=(x^2+a^2)^2-(y^2-b^2)^2$$

について，以下の各小問に答えよ．ただし，$a,\ b$ は $a^2\ne 0$ かつ $b^2\ne 0$ を満たす定数とする．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $f(x,y)=0$ かつ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ を満たす点を (p,q) とする．点 (p,q) をすべて求めよ．

(3) $b^2>a^2$ のとき，(2) で求めた各点 (p,q) において，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(p,q)\ne 0$ より，p を含む開区間で定義された $q=\varphi(p)$，$f(x,\varphi(x))=0$ を満たす陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する．このとき，$\dfrac{d\varphi}{dx}(p)$ と $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}(p)$ を求めよ．

(4) $a=b$ とする．xy 平面内の領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$ に対して，$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2025)　　(m20251703)

6.11 次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2} dx$ を求めよ.

(2) $D_n = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq n^2\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上での 2 重積分

$$I_n = \iint_{D_n} (x^2 + y^2)^2 e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ.

(信州大 2025)　　(m20251902)

6.12 xy-平面上の領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x^2 - y^2 < 1,\ 0 < 2xy < 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}$ に対し，変数変換 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ を考えると，領域 D と uv-平面上の領域 $D' = \left\{(u, v) \;\middle|\; 0 < u < 1,\ 0 < v < 1\right\}$ は一対一に対応する.

また，ヤコビアンについて $\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \left(\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right)^{-1}$ が成り立つ.

(1) 変数変換 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ に対し，ヤコビアン $\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ を x と y を用いて表せ.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^4 - y^4) dxdy$ の値を求めよ.

(信州大 2025)　　(m20251908)

6.13 以下の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x^2 \cos 2x \, dx$ を求めよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x + 2y) \cos^2(x - 3y) \, dxdy$ を求めよ.
ただし，$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x + 2y \leqq x - 3y \leqq \pi\right\}$ とする.

(信州大 2026)　　(m20261902)

6.14 a を正の実数とし，xy 平面上の領域 D_a を $D_a = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a\right\}$ とする．下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2} e^{-x^2}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$ の値を求めなさい.

(3) 等式 $\displaystyle\iint_{D_a} xy e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_0^a x e^{-x^2} dx\right)^2$ が成り立つことを示しなさい.

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \iint_{D_a} xy e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ の値を求めなさい.

(長岡技科大 2025)　　(m20252101)

6.15 変数変換 $x+y=s,\ x-y=t$ を利用して次の積分を求めよ.

$$\iint_D (x^2-y^2)dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq x+y\leq 1,\ 0\leq x-y\leq 1\right\}$$

(福井大 2025) (m20252403)

6.16 関数 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ （ e は自然対数の底, σ は正の実定数 ）に対して,

$g_2(x,y)=g(x)g(y)$ と定義する. さらに, $g_2(x,y)$ を変数変換

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad (r\geq 0,\ -\pi<\theta\leq\pi) \tag{1}$$

によって極座標表示 $f_2(r,\theta)$ に変換し,

$$f(r)=\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_2(r,\theta)|J(r,\theta)|d\theta & (r\geq 0) \\ 0 & (r<0) \end{cases} \tag{2}$$

によって関数 $f(r)$ を定義する. ここで, $J(r,\theta)$ は変数変換 (1) に対するヤコビアンで,

$$J(r,\theta)=\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \tag{3}$$

と表される. ただし, det は行列式である. 式 (2) に基づいて, $r\geq 0$ における $f(r)$ を求めると,

$$f(r)=\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (r\geq 0) \tag{4}$$

となる. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $f_2(r,\theta)$ および $J(r,\theta)$ は, ともに r のみの式で表される. $f_2(r,\theta)$, $J(r,\theta)$ をそれぞれ示せ.

(2) 式 (2) に基づいて, $r\geq 0$ における $f(r)$ が式 (4) で与えられることを示せ.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(r)dr$ の値を求めよ.

(4) $f(r)$ に対し, 第 1 次導関数を用いて増減表を書き, 極値を求めよ. また, $f(r)$ のグラフの概形を示せ. 第 2 次導関数は吟味しなくてもよい.

ちなみに, $g(x)$ はガウス分布, $f(r)$ はレイリー分布の確率密度関数として知られている.

(福井大 2025) (m20252412)

6.17 次の定積分および 2 重積分を求めよ.

ア. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

イ. $\displaystyle\iint_D (4x^2-y^2)dxdy$, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ |2x-y|\leqq 1,\ |2x+y|\leqq 2\right\}$

(豊橋技科大 2025) (m20252703)

6.18 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(60-4x+y-x^2)^3}} \qquad ただし \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2\leqq y\leqq 2x+3\right\}$$

(名古屋工業大 2025) (m20252904)

6.19 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (2x+3y)dxdy \quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\geq x^2,\ x\geq y^2\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq 2x\right\}$

(京都大 2025)　　(m20253309)

6.20　a を正の実数とし，I, D を

$$I=\left\{x \;\middle|\; 0 \leqq \sqrt{x} \leqq a\right\},$$
$$D=\left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leqq \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq a\right\}$$

と定める．以下の設問に答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_I \log\left(1+\sqrt{x}\right)dx$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\iint_D dxdy$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\iint_D (x^2-2y)dxdy$ を求めよ．

(大阪大 2025)　　(m20253505)

6.21　xyz 空間内の領域 D を

$$D=\left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leq 5,\ z \geq \sqrt{4x^2+4y^2}\right\}$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1)　D を図示せよ．

(2)　D の体積を求めよ．

(3)　3 重積分

$$\int_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

の値を求めよ．

(神戸大 2025)　　(m20253804)

6.22　a を実数とする．次のそれぞれの積分について，積分が収束するための a の条件とそのときの積分 I の値を求めよ．

(1)　$\displaystyle I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx$

(2)　$\displaystyle I=\int_D (1-x-y)^a dxdy,$　　$D=\left\{(x,y) \;\middle|\; x>0,\ y>0,\ x+y<1\right\}$

(神戸大 2025)　　(m20253806)

6.23　次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\,dxdy, \qquad D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\}$$

(広島大 2026)　　(m20264102)

6.24　以下の各問に答えよ．

(1)　I を以下の重積分とする．

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{1-y}}^{2} f(x,y)dxdy$$

xy 平面上に，積分範囲を図示せよ．

(2)　$f(x,y)=xe^{xy}$ として前問 (1) の I の値を求めよ．

(3) 正の実数 $x,\ y$ に対して $G(x,y)$ を以下のように定義する．

$$G(x,y)=\frac{x^y}{\log x}$$

$G(x,y)$ の y に関する偏微分 $\partial G/\partial y$ を求めよ．

(4) $p \geq q > 0$ とする．以下を示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^p-x^q}{\log x}dx=\log\frac{p+1}{q+1}$$

(九州大 2025)　　(m20254704)

6.25 累次積分 $I=\displaystyle\int_1^2\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{x+y}dy\right)dx$ の値を求めよ．

(宮崎大 2025)　　(m20255305)

6.26 次の積分の値を求めなさい．

$\displaystyle\iint_D xydxdy, \qquad D=\{0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$

(鹿児島大 2025)　　(m20255424)

6.27 曲面 $z=x^2+2xy+y^2$ と平面 $2x+y=2$ および 3 つの座標平面によって囲まれる立体の体積を求めよ．

(香川大 2025)　　(m20255703)

6.28 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq \cos x,\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D (x-y)dxdy$$

(滋賀県立大 2025)　　(m20256002)

6.29 次の (1)〜(5) に答えよ．ただし，

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

である．

(1) 極座標 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ のヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

を求めよ．

(2) 重積分 $I_1=\displaystyle\iint_D dxdy$ を求めよ．

(3) 重積分 $I_2=\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ を求めよ．

(4) 積分 $I_3=\displaystyle\int_0^1 e^{-r^2}r\,dr$ を求めよ．

(5) 重積分 $I_4=\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ．

(和歌山大 2025)　　(m20256502)

7 微分方程式

7.1 以下の設問に答えなさい.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(x+y)^2}$$

(3) 次の連立微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=x(t)+2y(t)\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=2x(t)+y(t)+\sin t\end{cases}$$

(北海道大 2025)　　(m20250104)

7.2 微分方程式 $y''-y'-2y=g(x)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $g(x)=0$ のときの一般解を求めなさい.

(2) $g(x)=20\sin 2x$ のときの特殊解を求めなさい.

(3) $g(x)=20\sin 2x$ のときの一般解を求めなさい.

(岩手大 2025)　　(m20250303)

7.3 次の (1),(2) の微分方程式を求めなさい.

(1) $\dfrac{df}{dx}-2xf=0$
ただし，$x=0$ において，$f(0)=1$

(2) $\dfrac{d^2f}{dx^2}-3\dfrac{df}{dx}+2f=0$
ただし，$x=0$ において，$f(0)=3$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=0}=4$

(秋田大 2025)　　(m20250403)

7.4 次の微分方程式をそれぞれ解け.

(1) $2x^2y'+(x-y)^2=0$

(2) $y''+4y'+5y=e^{-2x}$

(東北大 2025)　　(m20250503)

7.5 次の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=e^{3x}\cos x$$

の一般解を求めよ.

(お茶の水女子大 2025)　　(m20250606)

7.6 以下の微分方程式を解け.

(1) $x(x-1)\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(2) $\dfrac{d^2}{dx^2}y-4\dfrac{dy}{dx}+4y=2x+1$

(お茶の水女子大 2025)　(m20250608)

7.7 以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求めよ．
$\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(2) 次の微分方程式について考える．
$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=-\dfrac{y^2}{x^2}$

(a) $y(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ とおいて，$u(x)$ についての微分方程式を導け．

(b) 一般解 $y(x)$ を求めよ．

(3) 次の微分方程式について考える．ただし，$x>0$ とする．
$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{1}{x^3}$

(a) $x=e^t$ とおいて，$y(t)$ についての微分方程式を導け．ただし，e は自然対数の底とする．

(b) 一般解 $y(x)$ を求めよ．

(東京大 2025)　(m20250701)

7.8 次の微分方程式の解 $y=y(x)$ で，条件 $y(0)=\dfrac{dy}{dx}(0)=0$ を満たすものを求めなさい．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=5\cos x$$

(東京農工大 2025)　(m20250904)

7.9 $y=y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めよ．さらに，条件 $y(0)=1$ をみたす解を求めよ．

$y'-2xy=4x^3$

(電気通信大 2025)　(m20251005)

7.10 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\left(xy\sin\dfrac{y}{x}-x^2\cos\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx}=y^2\sin\dfrac{y}{x}+xy\cos\dfrac{y}{x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^3y\sqrt{1+y^2}}{(1+x^2)^2}$

(横浜国立大 2025)　(m20251102)

7.11 下の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}-2y=e^x$ を解きなさい．

(2) $u=\dfrac{1}{y}$ のとき，$\dfrac{du}{dx}$ を y および $\dfrac{dy}{dx}$ を用いて表しなさい．

(3) 微分方程式 $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{y}=-e^x$ を，変数変換 $u=\dfrac{1}{y}$ で u についての微分方程式に変換することにより解きなさい．

(長岡技科大 2025)　(m20252103)

7.12 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+5x=0$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = 13\sin 3t$$

(福井大 2025)　　(m20252408)

7.13 x は実数の変数であり，関数 $y(x)$ は x の実関数である．関数 $y(x)$ に関する微分方程式

$$(x-a)(x-b)\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

および,

$$(y-a)(y-b) = \frac{dy}{dx} \qquad \cdots\cdots\cdots⑤$$

につい以下の問いに答えよ．ただし，a および b はゼロでない実数の定数である．

(1) $a = b$ のとき，以下の問いに答えよ．

(a) 微分方程式 ④ の一般解を求めよ．

(b) 初期条件 $y(0) = 0$ のもとで微分方程式 ⑤ の解を求めよ．

(2) $a \neq b$ のとき，以下の問いに答えよ．

(a) 微分方程式 ④ の一般解を求めよ．

(b) 初期条件 $y(0) = 0$ のもとで微分方程式 ⑤ の解を求めよ．

(福井大 2025)　　(m20252411)

7.14 次の微分方程式を解け．

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

(福井大 2025)　　(m20252419)

7.15 以下の問題では，関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$，2 階導関数を $f''(x)$ で表すものとする．$r(x)$ を常には 0 ではない連続関数とする．つぎの 2 つの常微分方程式

$$y''(x) - y(x) = 0 \qquad (E_1)$$

$$z''(x) - z(x) = r(x) \qquad (E_2)$$

を考える 以下の問に答えよ．

(1) 条件

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

を満たす微分方程式 (E_1) の解を求めよ．

(2) 関数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ を微分方程式 (E_1) の 1 次独立な 2 つの解とする．
このとき，関数 $A_1(x)$，$A_2(x)$ がすべての実数 x で連立方程式

$$\begin{cases} A_1'(x)y_1(x) + A_2'(x)y_2(x) = 0 \\ A_1'(x)y_1'(x) + A_2'(x)y_2'(x) = r(x) \end{cases}$$

を満たすならば，関数

$$z(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + A_1(x)y_1(x) + A_2(x)y_2(x)$$

は微分方程式 (E_2) の解となることを示せ．ただし，C_1，C_2 は任意の定数とする．

(3) $r(x) = 4xe^x$ とする．このとき，条件

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = 1$$

を満たす微分方程式 (E_2) の解を求めよ．

(岐阜大 2025)　　(m20252606)

7.16　次の微分方程式の一般解を求めよ．

ア．$\dfrac{dy}{dx}+y=0$

イ．$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=0$

(豊橋技科大 2025)　　(m20252705)

7.17　xy 平面上の曲線 C 上の点 (x,y) における接線を考える．接線の傾き dy/dx を p とおき，接線上の任意の点の座標を (u,v) とする．以下の問いに答えよ．

(1)　接線の方程式を u,v,p,x,y を用いて示せ．

(2)　接線と原点との距離を p,x,y を用いて示せ．なお，接線と原点との距離とは，接線上の点 (u,v) と原点 $(0,0)$ との距離の最小値を指す．

(3)　接線と原点との距離が接点 (x,y) によらず 2 になるとする．このとき，前問 (2) の解を利用すれば，p,x,y の関係式が得られる．これを解いて，曲線 C の方程式を求めよ．

(名古屋大 2025)　　(m20252803)

7.18　以下の問いに答えなさい．

(1)　次の関数 $x(t)$ と $y(t)$ の連立微分方程式について答えなさい．

$$\frac{dx}{dt}=-3x+2y+2t+1$$
$$\frac{dy}{dt}=-4x+3y+5t+3$$

① 関数 $x(t)$ の 2 階微分方程式を，与えられた連立微分方程式から導きなさい．
ただし，関数 $y(t)$ およびその微分を含まない方程式にしなさい．

② 与えられた連立微分方程式の一般解を求めなさい．

(2)　実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を，$x\neq 0$ のとき $f(x)=x^2\log x^2$ と定義する．

① $f(x)$ が $x=0$ で連続となるように $f(0)$ の値を定義しなさい．

② $f(0)$ は問 ① で定義した値とする．$f'(x)$ を求めなさい．

(三重大 2025)　　(m20253105)

7.19　次の微分方程式の一般解を求めなさい．ただし，任意定数を C，　$u=\dfrac{y}{x}$ とする．

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

(三重大 2025)　　(m20253108)

7.20　(1)　未知関数 $y=y(x)$ に関する微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y'-3x^2y=x^2e^{-x^3} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

の解を求めよ．

(2)　未知関数 $y=y(x)$ に関する微分方程式

$$y''-4y'+4y=x$$

の一般解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2025)　　(m20253405)

7.21　以下の問いに答えよ．ただし，y は x の関数，y' は y の 1 階微分 $\dfrac{dy}{dx}$，y'' は y の 2 階微分 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．任意定数を用いる場合は $C_1,C_2,\cdots$ のように定義せよ．

(1) 次の微分方程式を解け.

$y' = (\cos x)(y-1)y$

(2) 次の微分方程式を解け.

$4y'' - 8y' + y = 0$

(大阪大 2025)　　(m20253502)

7.22 $x > 0$ とする．未知関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$(*) \qquad y''(x) + y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

は $y(x) = \dfrac{1}{x}$ を解に持つとする．このとき，次の問に答えよ.

(1) 係数 $b(x)$ を求めよ.

(2) 方程式 $(*)$ の解を $y(x) = u(x)\dfrac{1}{x}$ とおくとき，$u(x)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(3) 方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ で，$\displaystyle\lim_{x \to +0} xy(x) = 1$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} xy(x) = 0$ となるものを求めよ.

(神戸大 2025)　　(m20253808)

7.23 方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$ の解を求めよ．ただし，$t = 0$ のとき $y = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = 4$ とする.

(広島大 2025)　　(m20254103)

7.24 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 65\cos(2t)$$

(広島大 2026)　　(m20264103)

7.25 次の問題について解答しなさい.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$y' = -\dfrac{2}{y}$

(2) さらに，次の式を満足する上記 (1) で求めた特殊解を求めなさい.

$y(2) = 0$

(山口大 2025)　　(m20254301)

7.26 次の微分方程式の一般解を求めよ.

ただし，(3) については，解の中に虚数を含まない形で書け.

（一般解にでてくる定数が複素数になるのは構わない．）

(1) $y'' = -\omega_0^2 y$　　（ω_0 は正の実数）

(2) $y'' - 2y' - 3y = 0$

(3) $y'' + 4y' + 8y = 0$

(高知大 2025)　　(m20254503)

7.27 次の微分方程式について，次の問いに答えよ.

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2xy$$

(1) 一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $(x, y) = (1, 1)$ を満たす特殊解を求めよ.

(熊本大 2025)　　(m20255201)

7.28 次の各問に答えよ.

(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -2y$ について考える.

(a) 一般解を求めよ.

(b) $y(0) = 2$ を満たす特殊解を求めよ.

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ について考える.

(a) 一般解を求めよ.

(b) $y(0) = 1$ かつ $\dfrac{dy}{dx}(0) = -1$ を満たす特殊解を求めよ.

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 2x$ の一般解を求めよ.

(宮崎大 2025)　　(m20255303)

7.29 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y' = 4y + e^{4x}$　　(2) $y'' + y' - 6y = 36x$　　(3) $y' = (yx - y)^{-\frac{1}{2}}$

(鹿児島大 2025)　　(m20255403)

7.30 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x^2y' = -2xy - \sin x$　　(2) $y'' + 4y' + 4y = 8x$　　(3) $y' = (yx - y)^2$

(鹿児島大 2025)　　(m20255408)

7.31 関数 $y = f(x)$ の任意の点 $(t,\ f(t))$ における接線が x 軸と $\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$ で交わるような $f(x)$ の形を決定しなさい. ただし, x, y, t は実数であり, $f(x)$ は微分可能であるとする.

(鹿児島大 2025)　　(m20255425)

7.32 時刻 t における人口を $N(t)$ とする. 時刻 t から $t + \triangle t$ の間の人口の増分 $\triangle N$ は $N(t)$, $\triangle t$ に比例する. このとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 比例定数を $k (k > 0)$ として微分方程式を示しなさい.

(2) ある村の 2005 年における人口は 1000 人, 2015 年の人口は 1200 人であった. 2005 年を $t = 0$, 2015 年を $t = 1$ とするとき, 上記 (1) で求めた微分方程式を解くことにより, 2025 年の人口を求めなさい.

(鹿児島大 2025)　　(m20255428)

7.33 微分可能な関数 $f(x)$ がすべての実数 x に対して次式を満たすとき, $f(x)$ を x の関数として示しなさい.

$$\int_1^x \{2f(t) - 2\}\, dt = f(x) - 2$$

(鹿児島大 2025)　　(m20255429)

7.34 微分方程式 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = Ax^2 + Bx$ （ $A,\ B$ は任意定数 ）は一般解であることを証明せよ.

(2) 境界条件「 $x = 1$ のとき $y = 1$, $x = 2$ のとき $y = 1$ 」を満たす特殊解において, $x = 1$ のときの y' を求めよ.

(香川大 2025)　　(m20255702)

7.35 以下の問いに答えよ.

(1) 以下の微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}-3\sin t-2\cos t=0$$

の解 $x(t)$ を求めよ．ただし,

$$x(0)=0,\qquad \frac{dx(0)}{dt}=0$$

とする.

(2) (1) の解答を利用して，以下の微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt}-\frac{d^2x(t)}{dt^2}-\frac{dx(t)}{dt}-\sin t=0$$

の解 $y(t)$ を求めよ．ただし，$y(0)=0$ とする.

(東京都立大 2025)　　(m20255907)

線形代数

8 ベクトル

8.1 xyz 空間に，A(2, 0, −1)，B(3, −2, 1)，C(6, 2, 1) がある．以下の問いに答えなさい.

(1) yz 平面について，点 B と対称な点 P の座標を求めなさい.

(2) 線分 BA を 2 : 1 に内分する点 Q の座標を求めなさい.

(3) 線分 BA と線分 BC のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい.

(4) 四角形 ABCD が平行四辺形となる点 D を求めなさい.

(5) 平行四辺形 ABCD の面積 S を求めなさい.

(岩手大 2025)　　(m20250301)

8.2 原点を O(0, 0, 0) とする 3 次元ユークリッド空間に 3 点 A$(a,0,0)$，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 2) がある.
以下の設問に答えなさい.

(1) a を用いて 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と直交する単位ベクトルを表しなさい.

(2) a を用いて 3 点 A，B，C を通る平面の方程式を表しなさい.,

(3) 設問 (2) の平面に関して，平面と点 D(2, −2, 5) との距離が，平面と原点 O との距離に等しくなるとき，a の値を求めなさい.

(秋田大 2025)　　(m20250402)

8.3 (1) n 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるとき，ベクトル $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ は一次独立であるか否かを示せ.

(2) 以下の $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_5$ のベクトルの中から，1 次独立ベクトルの組を選ぶことを考える．最も多くのベクトルを含む組を 1 つ示せ.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\-5\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_5=\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\\2\end{pmatrix}$$

(筑波大 2026)　　(m20261306)

8.4 次のベクトル群が一次独立か一次従属かどうか判断せよ．

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(福井大 2025)　　(m20252421)

8.5 平面に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 直線 $\boldsymbol{\ell} : x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ を含み，平面 $\alpha : 2x - 4y + z = 3$ に垂直な平面 β の方程式を求めなさい．

(2) 2 平面 $2x - y + z = 3,\ x - 2y - z = -4$ のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2025)　　(m20253110)

8.6 xy 平面上において，原点 O を中心とする半径 r の円周上を動く点 P があり，OP が 1 秒間に角 $\omega(> 0)$ の割合で z 軸正方向から見て反時計回りに回転している． なお，時刻 $t = 0$ における点 P の位置を $(x, y) = (0, r)$ とする． このことについて以下の問いに答えなさい．

(1) t 秒後の点 P の座標 (x, y) を求めなさい．

(2) t 秒後の点 P の速度 $\vec{v}$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めなさい．

(3) 点 P の速度 $\vec{v}$ と加速度 $\vec{a}$ は常に垂直であることを示しなさい．

(熊本大 2025)　　(m20255203)

8.7 点 O$(0, 0, 0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 O-xyz において，点 A$(0, 1, 0)$，点 B$(1, 0, 2)$ がある． このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 A と点 B を通る直線の方程式を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角度 θ を求めよ．

(3) △OAB の面積 S を求めよ．

(鹿児島大 2025)　　(m20255404)

8.8 点 O$(0, 0, 0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 O-xyz において，点 A$(0, 1, 0)$，点 B$(1, 0, 2)$，点 C$(1, 1, 0)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) △OAB の面積を求めよ．

(2) 点 O，点 A，点 B，点 C を 4 つの頂点とする四面体の体積を求めよ．

(鹿児島大 2025)　　(m20255409)

8.9 点 O を原点とする直交座標系における 2 点 P$(\cos\theta, \sin\theta)$，Q$(-1, \sqrt{3})$ について，以下の問いに答えなさい． ただし，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ のときの θ の値を求めなさい．

(2) 三角形 OPQ の面積が最大となるときの θ の値と三角形 OPQ の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2025)　　(m20255413)

8.10 点 O を原点とする xyz 直交座標系における 3 点 A$(1, 0, 0)$，B$(0, 1, 0)$，C$(0, 0, 1)$ を通る平面を S として，以下の問いに答えなさい．

(1) 平面 S の単位法線ベクトルをすべて求めなさい．

(2) 平面 S の式を求めなさい．

(鹿児島大 2025)　　(m20255418)

8.11 次の設問に答えなさい．

(1) 2 点 $\mathrm{A}(-1,3,2)$, $\mathrm{B}(2,5,1)$ を通る直線の方程式を求めなさい．

(2) $\mathrm{C}(1,1,0)$ を通って，(1) の直線を含む平面の方程式を求めなさい．

(鹿児島大 2025)　　(m20255423)

9 行列

9.1 (1) a と b を実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2a-3b-1 & 0 & -1 \\ -a+b+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が $A^{10}=O$ を満たすとき，a と b の値を求めよ．ただし，O は零行列とする．

(2) $p,\ q,\ r$ を実数として，行列 $B=\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & r \\ q & r & 0 \end{pmatrix}$ を考える．ある正の整数 m に対して B^m が単位行列 E に等しくなることはあるか,．理由と共に答えよ．

(東京工業大 2025)　　(m20250803)

9.2 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　（t は転置を表す）

(福井大 2025)　　(m20252420)

9.3 次の行列が正則であるか調べ，正則であるなら逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(京都大 2025)　　(m20253305)

9.4 $ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d を用いて行列 M を以下のように定める.

$$M = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えなさい.

(1) M が逆行列 M^{-1} を持ち, 更に M^{-1} が対称行列であることを示しなさい.

(2) 任意の実数 x, y について, 以下の不等式が成立することを示しなさい.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$

(3) 任意の実数 x, y について, 以下の不等式が成立することを示しなさい.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$

(熊本大 2025) (m20255202)

9.5 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい.

(鹿児島大 2025) (m20255414)

9.6 次の行列 U が直交行列になるように, 正規直交基底 a, b を求めなさい.

$$U = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & a \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & b \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2025) (m20255427)

9.7 行列

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

について, 次の (1)〜(5) に答えよ. x, y, z, u, v は実数である.

(1) 次式が成り立つように x を求めよ.

$$A(\theta) = xE + yI$$

(2) 前問で, y を求めよ.

(3) 次式が成り立つように z を求めよ.

$$A(\theta)A(\varphi) = A(z)$$

(4) 行列 θI の指数行列を

$$\exp(\theta I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\theta I)^n$$

で定めると, $I^2 = -E$ を使って, 次式が示せる.

$$\exp(\theta I) = uE + vI$$

u を求めよ.

(5) 前問で, v を求めよ.

(和歌山大 2025) (m20256501)

10　行列式

10.1　(1)　次の実正方行列 A の行列式を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

(2)　(1) の行列 A が正則となる条件を a, b, c, d を用いて述べよ．

(3)　2 次元平面上の 4 つの点 $(x_i,\ y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を通る次のような多項式 $y = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3$ を決める問題を考える．y 座標および多項式の係数についての列ベクトルを，それぞれ，$\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$，$\boldsymbol{h} = {}^t(h_0,\ h_1,\ h_2,\ h_3)$ と定めるとき，多項式が 4 つの点すべてを通る条件を $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{h}$ と 4 次正方行列を用いて表せ．ただし，ベクトル $\boldsymbol{z}$ の転置は ${}^t\boldsymbol{z}$ と表す．

(4)　(3) の x_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ がすべて異なるとき，多項式が一意に決まることを示せ．

(筑波大 2025)　　(m20251308)

10.2　t は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　A の行列式の値を求めよ．また，A が正則なとき，t が満たす条件を求めよ．

(2)　t が (1) で求めた条件を満たすとき，A の逆関数を求めよ．

(信州大 2025)　　(m20251903)

10.3　以下の問いに答えよ．

(1)　行列式 $\begin{vmatrix} x^4 & y^4 & z^4 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求め，因数分解せよ．

(2)　x は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x^4 & 0 \\ 1 & x^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が正則なとき，x が満たす条件を求めよ．

また，そのときの逆行列 A^{-1} の $(1, 1)$ 成分と $(3, 2)$ 成分を求めよ．

(信州大 2026)　　(m20261903)

10.4　α を実数値をとる変数とするとき，行列 $A(\alpha)$ を次のように定義する．

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} -\alpha + 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & -\alpha + 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha + 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

以下の各問に答えよ．

(1)　行列 $A(\alpha)$ の行列式を計算せよ．

(2)　行列 $A(\alpha)$ が逆行列を持たないときの α の値を求めよ．

(3)　$\alpha = 1$ とする．　q_{ij}　$(i = 1, 2, 3,\quad j = 1, 2, 3)$，　r_{12}，r_{13}，r_{23} は実数値をとる変数とする．r_{11}, r_{22}, r_{33} は 0 以上の実数値をとる変数とする．q_{ij}　$(i = 1, 2, 3,\ \ j = 1, 2, 3)$ と r_{11}. r_{12}，r_{13}，r_{22}，r_{23}，r_{33} を用いて，行列 Q と行列 R を定める．

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

さらに，行列 Q と行列 R は下の 2 つの式 ②, ③ を同時に満たすとする．

$$A(1) = QR \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$Q^T Q = I \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，Q^T は Q の転置行列を表す．I は 3×3 の単位行列を表す．

3 つの縦ベクトル $\boldsymbol{q_1}$，$\boldsymbol{q_2}$，$\boldsymbol{q_3}$ を Q の成分を利用して定義する．

$$\boldsymbol{q_1} = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q_2} = \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q_3} = \begin{pmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{pmatrix}$$

式 ② は，3 つの縦ベクトル $\boldsymbol{q_1}$，$\boldsymbol{q_2}$，$\boldsymbol{q_3}$ を利用することにより，次のように

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r_{11}\boldsymbol{q_1}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r_{12}\boldsymbol{q_1} + r_{22}\boldsymbol{q_2}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r_{13}\boldsymbol{q_1} + r_{23}\boldsymbol{q_2} + r_{33}\boldsymbol{q_3}$$

書き直すこともできる．

式 ③ も，3 つの縦ベクトル $\boldsymbol{q_1}$，$\boldsymbol{q_2}$，$\boldsymbol{q_3}$ を利用することにより，次のように

$$\boldsymbol{q_1}^T\boldsymbol{q_1} = 1, \quad \boldsymbol{q_1}^T\boldsymbol{q_2} = 0, \quad \boldsymbol{q_1}^T\boldsymbol{q_3} = 0$$

$$\boldsymbol{q_2}^T\boldsymbol{q_1} = 0, \quad \boldsymbol{q_2}^T\boldsymbol{q_2} = 1, \quad \boldsymbol{q_2}^T\boldsymbol{q_3} = 0$$

$$\boldsymbol{q_3}^T\boldsymbol{q_1} = 0, \quad \boldsymbol{q_3}^T\boldsymbol{q_2} = 0, \quad \boldsymbol{q_3}^T\boldsymbol{q_3} = 1$$

書き直すこともできる．ここで，$\boldsymbol{q_1}^T$, $\boldsymbol{q_2}^T$, $\boldsymbol{q_3}^T$ は，それぞれ，$\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$, $\boldsymbol{q_3}$ を転置することにより得られるベクトルを表す．すなわち，$\boldsymbol{q_1}^T$, $\boldsymbol{q_2}^T$, $\boldsymbol{q_3}^T$ は横ベクトルである．

行列 Q と行列 R を計算せよ．

(福井大 2025)　　(m20252410)

10.5　a, b を実数とする．3 次正方行列 A を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2b \\ 1 & a & b \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ．

(1)　$a = 1$, $b = 1$ のときの行列 A の行列式の値を求めよ．

(2)　行列 A の行列式の値が 0 になるための必要十分条件を求めよ．

(3)　行列 A が以下の式を満たすときの a, b の値を求めよ．

$$A^3 + A^2 + A + E = O$$

ただし，E は 3 次の単位行列，O は 3 次の零行列とする．

(4)　(3) の式を満たす行列 A に対し，A^4, A^5 を求めよ．

(岐阜大 2025)　　(m20252601)

10.6　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 等式 $XA = |A|B$ を満たす行列 X を求めよ.

(豊橋技科大 2025)　　(m20252701)

10.7 以下では，行列の成分はすべて実数であるとする．E を 2 行 2 列の単位行列とし，O を 2 行 2 列の零行列とする．2 行 2 列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し，2 行 2 列の行列 $\widetilde{A}$ と実数 $\mathrm{tr}(A)$ を

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \mathrm{tr}(A) = a + d$$

と定める．また，$|A|$ は A の行列式であるとする．

(1) 行列の積 $A\widetilde{A}$ および $\widetilde{A}A$ を求めよ.

(2) $A - \mathrm{tr}(A)E + \widetilde{A}$ を求めよ.

(3) 等式 $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + |A|E = O$ が成り立つことを示せ.

(4) 次の条件 (i) と条件 (ii) は同値であることを示せ.

　(i) $A^2 = O$

　(ii) $|A| = 0$ かつ $\mathrm{tr}(A) = 0$

(京都工芸繊維大 2025)　　(m20253401)

10.8 p, q を実数，n を 2 以上の自然数として，n 次の正方行列 A_n を次のように定める.

$$\begin{cases} a_{i,i} = 2p & (i = 1, 2, \cdots, n), \\ a_{i,i+1} = q & (i = 1, 2, \cdots, n-1), \\ a_{i+1,i} = q & (i = 1, 2, \cdots, n-1), \\ a_{i,j} = 0 & (\,|\,i - j\,| \geqq 2\,), \end{cases}$$

ここで，$a_{i,j}$ は A_n の (i, j) 成分である．たとえば

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2p & q \\ q & 2p \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2p & q & 0 \\ q & 2p & q \\ 0 & q & 2p \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2p & q & 0 & 0 \\ q & 2p & q & 0 \\ 0 & q & 2p & q \\ 0 & 0 & q & 2p \end{pmatrix}, \ \cdots$$

である．A_n の行列式を D_n とおくとき，以下の設問に答えよ.

(1) D_2，D_3 を求めよ,

(2) $n \geqq 4$ とするとき，D_n を D_{n-1}，D_{n-2}，p，q を用いて表せ.

(3) $p = q$ のとき，D_n を p と n を用いて表せ.

(4) $n \geqq 3$，$p > 1$，$q = 1$ の場合を考える．$D_n > D_{n-1} + 1$ であることを示せ．さらに，$D_n > n + 1$ であることを示せ.

(大阪大 2025)　　(m20253506)

10.9 4 次行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ.

(高知大 2025)　　(m20254504)

10.10 $\boldsymbol{R}$ を実数全体のなす集合とし，$\boldsymbol{R}^3$ を 3 次実列ベクトル全体のなす集合とする．

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$\boldsymbol{a}$ の転置により得られる 3 次行ベクトル

${}^t\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{b}$ の（行列としての）積 ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ により得られる実数を $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ とおく：

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$，および $k \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^3$ は以下をみたすとする．

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} + k\boldsymbol{x}, \qquad (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{v}) = 0$$

以下の問いに答えよ．

(1) (i) $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = 0$ が成り立つことを示せ．

(ii) k の値を求めよ．

(2) $\left\{\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{v} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R}\right\} = \left\{\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{u} + \gamma\boldsymbol{v} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R}\right\}$ が成り立つことを示せ．

(3) 3 次正方行列 A を $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$ で定め，A の行列式を $|A|$ で表す．

(i) $|A|^2 = 11(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})$ が成り立つことを示せ．

(ii) $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{v}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $\boldsymbol{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ．

(愛媛大 2025) (m20254601)

10.11 以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値が 1 となる a を求めなさい．

(2) 以下の式の係数行列の逆行列を求めることにより，$x,\ y$ を求めなさい．

ただし，$ad - bc \neq 0$ とする．

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(鹿児島大 2025) (m20255419)

10.12 $\overrightarrow{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\overrightarrow{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$，$\overrightarrow{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z)$ とするとき，$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ は

3 つのベクトルを並べた以下の行列 A の行列式と等しい．このことを利用して，

4 点 $\mathrm{P}(1,2,3)$，$\mathrm{Q}(1,3,5)$，$\mathrm{R}(4,6,0)$，$\mathrm{S}(-1,1,3)$ を頂点とする四面体 PQRS の体積を求めよ．

行列式を利用したことが分かるように途中式を示すこと．

$$A = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

(香川大 2025) (m20255704)

10.13　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & a+1 & 3 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列の積 AB を求めよ.

(2) 行列式 $|A|$, $|B|$, $|AB|$ を求めよ.

(3) 行列 AB が正則になるための a の条件を求めよ.

(滋賀県立大 2025)　　(m20256003)

11 連立方程式

11.1　次の連立方程式について，a を実数の定数として以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ ax + 2y + 3z = 3 \\ 3x + y + az = 2 \end{cases}$$

(1) 連立方程式の解が 1 組に決まる条件を係数行列の行列式を用いて示せ．また，そのときの a の条件を示せ.

(2) 解がない場合の a の値を求めよ.

(3) 解が一意に定まらない場合のの a の値を求めよ．またその解が，任意定数 t を用いて
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる場合，定数 c_1, c_2, c_3, c_4 を求めよ.

(筑波大 2025)　　(m20251305)

11.2　実数 a を含む連立方程式

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ 2x + y + az = 8 \\ 2x - y + 6z = 2 \end{cases}$$

に対して，次の係数行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

以下の設問 (1), (2) に解答せよ.

(1) A のランク（階数）を求めよ.

(2) この連立方程式が解をひとつだけもつとき，その解を a を用いて表せ.

(福井大 2025)　　(m20252415)

11.3　(1) 次の行列 A の階数を求めよ．ただし，a は定数である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

(2) $x,\ y,\ z$ についての次の連立 1 次方程式を解け．ただし，a は定数である．

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+ay+a^2z &= a \\ x+a^3y+a^4z &= 1+a-a^2 \end{cases}$$

(名古屋工業大 2025)　　(m20252906)

11.4 行列に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 次の行列の逆行列を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の連立方程式を，行列を用いて解きなさい．

$$\begin{cases} x+y-5z=18 \\ -2x+y+5z=-15 \\ -y+2z=-8 \end{cases}$$

(三重大 2025)　　(m20253109)

11.5 $\boldsymbol{R}^3$ を 3 次実列ベクトル全体のなす集合とし，$a,\ b$ を実数とする．3 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知ベクトル，3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$$

を係数行列とする連立 1 次方程式

$$(\#) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{o}$ は 3 次零ベクトルとする．以下の問いに答えよ．

(1) (i) 方程式 (#) は少なくともひとつの解をもつことを示せ．

(ii) A の階数 $\mathrm{rank}\,A$ を求めよ．

(2) (i) $(a,\ b)=(2,\ 3)$ とする．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ が (#) の解のとき，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ であることを示せ．

(ii) $(a,\ b)=(1,\ 2)$ とする．$\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3$ が (#) の解のとき，$\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}$ は 1 次従属であることを示せ．

(iii) (#) の解 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3$ で 1 次独立なものが存在するための必要十分条件は $(a,\ b)=(1,\ 1)$ であることを示せ．

(愛媛大 2025)　　(m20254602)

12 線形変換

12.1 以下の設問に答えなさい．

(1) 実行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ と 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{x}$ の A による変換で与えられるベクトル

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=A\boldsymbol{x}$$

の成分 $y_1,\ y_2$，および大きさ $|\boldsymbol{y}|$ を $a,\ b,\ x_1,\ x_2$ の式で表しなさい．ただし，$a,\ b$ の少なくとも一方は 0 ではないものとする．

(2) 設問 (1) の変換が，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ の変換結果についてその大きさを不変にするときの条件を $a,\ b$ の式で表せ．また，$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta$ （ θ は実数 ）がこの性質を満たしていることを示しなさい．

(3) 設問 (1) の行列 A とベクトル $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ に関し，$a=\sqrt{3},\ b=1,\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{y}$ の大きさ $|\boldsymbol{y}|$ を $x_1,\ x_2$ の式で表しなさい．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ の成す角 θ を $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で求めなさい．ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである．

(北海道大 2025)　　(m20250101)

12.2 行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\mathbf{A}$ の余因子行列 $\widetilde{\mathbf{A}}$ と逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ の関係式を行列式 $|\mathbf{A}|$ を用いて示せ．

(2) 行列 $\mathbf{A}$ の余因子行列 $\widetilde{\mathbf{A}}$ と 行列式 $|\mathbf{A}|$ を求めよ．

(3) 行列 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ．

(4) 行列 $\mathbf{A}$ を表現行列とする線形変換による，平面 $2x-y+z=0$ の像の方程式を求めよ．

(東北大 2025)　　(m20250501)

12.3 図 1.1 の直交座標系において，点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする．以下の設問 (1), (2) に解答せよ．

(1) 原点 O から点 P に向かうベクトル $\boldsymbol{p}$，x 軸の正の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$，および y 軸の正方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_y$ を

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y$ および $x_1,\ y_1$ を用いて，ベクトルの和で表せ．

(2) 点 P を，原点 O を中心とし，回転角 θ で反時計回りに回転する．回転後の点を Q，Q の座標を $(x_2,\ y_2)$ とする．原点 O から点 Q に向かうベクトル $\boldsymbol{q}$ を

$$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

とするとき，点の回転は，行列 T を用いて，行列とベクトルの積

$$\boldsymbol{q}=T\boldsymbol{p}$$

で記述できる．行列 T を導け．

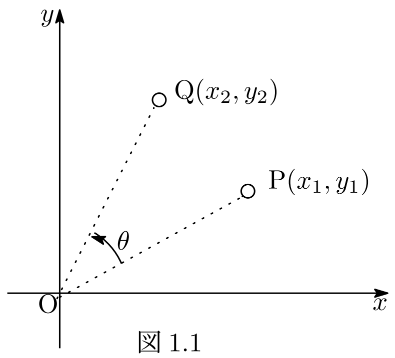


図 1.1

(福井大 2025)　　(m20252413)

12.4 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ という 2 次元空間の線形変換を考える.

(1) $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の時, $x_2 = x_1 - 1$ 上の点はどのような点に移されるか示せ.

(2) $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ の時, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である点はどのようなに移されるか示せ.

(福井大 2025)　　(m20252423)

12.5 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について, x 軸, y 軸, z 軸方向の基本ベクトルの像がそれぞれ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ のとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立であるための k の条件を求めなさい.

(2) $f(\boldsymbol{a})$ を求めなさい.

(3) $k = 0$ のとき $f(\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合で表しなさい.

(三重大 2025)　　(m20253104)

13 固有値とその応用

13.1 以下の設問に答えなさい.

(1) x_1, x_2, x_3 についての連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

が一意の解を持つ実数 s の条件を示し, そのときの解を s の式で表しなさい.

(2) 以下のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次従属であるための条件を s の式で示しなさい. また, $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の線型結合で表しなさい.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

(3) 以下の行列 M のすべての固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを求めなさい.

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) 設問 (3) の行列 M について, $P^{-1}MP$ が対角行列となるような正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めなさい.

(5) 設問 (3) の行列 M について, M^5 を求めなさい.

(北海道大 2025)　　(m20250102)

13.2 (1) 全ての要素が 0 または 1 であるような 2 次の正方行列 A のうち，
$A^2 = O,\ A \neq O$ を満たすものを全て求めなさい．ただし，O は零行列である．

(2) (1) で求めた行列 A について，$(A + A^T)^{100} + I$ の固有値を求めなさい．
ただし，A^T は A の転置行列，I は単位行列である．

(岩手大 2025)　　(m20250302)

13.3 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に関して以下の設問に答えなさい．

(1) 行列 A のすべての固有値を求め，それぞれに対する固有ベクトルを求めなさい．

(2) 行列 $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる行列 P を一つ定め，B を求めなさい．

(3) n を自然数として，A^n を求めなさい．

(秋田大 2025)　　(m20250404)

13.4 数列 $\{x_n\},\ \{y_n\}$ を $n \geqq 1$ について次のように定義する．ただし，$x_0 = y_0 = 1$ とする．

$$x_n = 0.6x_{n-1} + 0.2y_{n-1}$$

$$y_n = 0.4x_{n-1} + 0.8y_{n-1}$$

(1) この数列を，行列を用いて $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 $\mathbf{B}$ を求めよ．

(2) 行列 $\mathbf{B}$ の固有値を求めよ．

(3) 行列 $\mathbf{B}$ を対角化せよ．また，$\mathbf{B}$ を対角化する正則行列 $\mathbf{P}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(東北大 2025)　　(m20250502)

13.5 (1) 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) 問 (1) の行列 A を用いて，微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = \omega A \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を表した．ここで，ω は正の実定数，x_1, x_2, x_3 は実数であるとする．行列 A を対角化し，

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

を得たとき，上記の微分方程式を B を用いて

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y} = \omega B \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

の形に表せ．ここで，$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ とする．また，このときの $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}$ の関係を示せ．さらに，B を用いて表した微分方程式を解き，$\boldsymbol{y}$ を求めよ．ただし，解答にあたって必要な任意定数は自ら定義して用いること．

(お茶の水女子大 2025)　　(m20250605)

13.6　3 次元座標空間内の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を点 $\mathrm{P}'(x', y', z')$ に移す 1 次変換 f を以下のように定義する．

$$f \ : \ \begin{cases} x' = x + ay - az \\ y' = ax + ay + az \\ z' = -ax + ay + z \end{cases} \qquad (a \text{ は実数})$$

この 1 次変換 f を表す行列を A とする．

(1)　行列 A を記せ．

(2)　f の逆変換 f^{-1} が存在するための a の条件を示せ．

ここで，行列 A の固有値の 1 つが 2 であるとする．

(3)　a の値を全て求めよ．

(4)　(3) で求めたそれぞれの a の値に対して，行列 A が持つ残りの固有値を全て求めよ．

(5)　以下では (3) で求めた a のうち，絶対値が最も大きいものについて考える．

(a) 行列 A の全ての固有値についてそれぞれ，長さが 1 である固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を求めよ．

(b) $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ が互いになす角度を全て求めよ．

(東京大 2025)　　(m20250704)

13.7　n を 3 以上の整数とする．n 次正方行列 $A_n = (a_{i,j})$ と $B_n = (b_{i,j})$ は，その (i, j) 成分 $a_{i,j}$ と $b_{i,j}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ が以下で定められているとする．

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i - j = 1 \text{ または } i - j = 1 - n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \qquad b_{i,j} = q^{\min\{|i-j+\ell n| \,:\, \ell \in \mathbb{Z}\}}$$

ただし，q は正の実数であり，$\min\{|i - j + \ell n| \ : \ \ell \in \mathbb{Z}\}$ は，ℓ が全ての整数を動くときの $|i - j + \ell n|$ の最小値を意味する．

(1)　A_n の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2)　$A_n B_n - B_n A_n$ を求めよ．

(3)　n が奇数 $n = 2m + 1$ のとき，B_n の固有値を求めよ．

(東京工業大 2025)　　(m20250804)

13.8　次の行列 A の最大の固有値を α，最小の固有値を β とする．以下の問いに答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)　α, β を求めなさい．

(2)　行列 A の固有値 α に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が，A の固有値 β に属するすべての固有ベクトルと垂直であるとき，y, z を求めなさい．

(東京農工大 2025)　　(m20250903)

13.9 k を実数として，3 つのベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 3 次正方行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}$ が正則となるための k の条件を求めよ．

(2) 第 1 行が $\begin{bmatrix} 29 & -22 & 8 \end{bmatrix}$ である 3 次正方行列 A を考える．

(i) $\boldsymbol{p}_1$ が A の固有ベクトルとなっているとする．$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{p}_1$ となる実数 λ_1 を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ が A の固有ベクトルとなっているとし，k が (1) で求めた条件をみたすとする．このとき，正の整数 n に対して，A^n の行列式 $|A^n|$ の値を k と n の式で表せ．

(電気通信大 2025)　　(m20251001)

13.10 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値とその固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 A を対角化せよ．

(3) 二次形式 $3x^2 + 4xy + 6y^2$ を 標準形に変形せよ．

(横浜国立大 2025)　　(m20251101)

13.11 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，θ は実数の定数である．

(1) 行列 A の転置行列を ${}^tA$ で表す場合，${}^tAA$ を求めよ．

(2) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ．ただし，固有値 λ_1，λ_2 は複素数である．

(3) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を求めよ．

(4) $A^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

(筑波大 2025)　　(m20251306)

13.12 2 次曲線 $5x^2 - 2xy + 10\sqrt{6}x - 2\sqrt{6}y + 18 = 0$ について考える．

(1) $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし，上記の 2 次曲線を ${}^t\boldsymbol{z}A\boldsymbol{z} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{z} + c = 0$ と表す．
対称行列 A，ベクトル $\boldsymbol{b}$，スカラー c を求めよ．ただし，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置は ${}^t\boldsymbol{x}$ と表す．

(2) (1) で求めた行列 A の固有値および長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルを横に並べた行列 P を用いて，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ という変数変換を行い，2 次曲線を新たな変数 X, Y を用いて表せ．

(4) 変数 X, Y で表された 2 次曲線を楕円 $\dfrac{s^2}{a} + \dfrac{t^2}{b} = 1$ の形式（a, b は正の定数）に変形し，新たな変数 s, t を変数 X, Y で表せ．

(5) 変数 x, y を変数 s, t に変換する変数変換を「回転（または鏡映）」および「平行移動」の語を用いて説明せよ．

(筑波大 2025)　　(m20251307)

13.13 正の実数 a を含む 2 次関数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2axy+2ayz$ は実対称行列 A と実ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を用いて，$f(x,y,z)=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ と表せる．

また，$f(x,y,z)$ は直交行列 B と実ベクトル $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ を用いた 1 次変換 $\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{u}$ によって，

$g(u,v,w)=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2$ の形に変換される（ただし，λ_1，λ_2，λ_3 は実数とする）．

このとき，以下の設問に答えなさい．

(1) 行列 A を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい．

(3) $f(x,y,z)=1$ が楕円面となるための a の条件を求めなさい．

(4) $|\lambda_1|$，$|\lambda_2|$，$|\lambda_3|$ のうち最も値が大きいものが $\dfrac{3}{2}$ となるとき，a および行列 B を求めなさい．

(筑波大 2025)　　(m20251317)

13.14 漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$a_1=1$，$a_2=1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について考える．ここで n は正の整数とする．$a_{n+1}=b_n$ として，以下の問いに答えよ．

(1) 上記漸化式を $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ と表す． ここで A は整数を成分とする 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & f \\ g & h \end{pmatrix}$ である．この行列 A の成分 f，g，h の値を求めよ．

(2) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 およびこれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を求めよ．ただし，$\lambda_1<\lambda_2$ とし，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ それぞれの第 2 成分を 1 とすること．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(4) A^n を n，P，P^{-1}，λ_1，λ_2 を用いて表せ．

(5) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ を A^n を用いて表し，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

次に，漸化式 $a_{n+2}=sa_{n+1}+ta_n$ （ s，t は実数 ），$a_1=1$，$a_2=1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について考える．ここで n は正の整数とする．$a_{n+1}=b_n$ として，以下の問いに答えよ．

(7) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 B を実数の範囲で対角可能な s，t の必要十分条件を求めよ．

(筑波大 2026)　　(m20261304)

13.15 4 次の実対称行列 A を次のように定める．

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) 以下の $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ は行列 A の固有ベクトルである．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

各ベクトルに対応する固有値をそれぞれ答えよ．

(2) 直交行列を用いて行列 A を対角化せよ．

(筑波大 2026)　　(m20261305)

13.16 3 つの漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + 2z_n \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定まる数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めなさい．

(2) 行列 A の全ての固有値を求め，各固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めなさい．

(3) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とするとき，これを設問 (2) で求めた固有ベクトルの一次結合で表しなさい．

(4) 設問 (3) の結果を用いることにより，数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ の一般項を求めなさい．

(筑波大 2026)　　(m20261312)

13.17 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて，$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形変換 T が $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad \left(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\right)$ で与えられているとする．このとき，以下の各小問に答えよ．

(1) T の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた T の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) 行列 A は対角化できるかどうか調べよ．

(茨城大 2025)　　(m20251701)

13.18 a は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a-1 & 1 & a-1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化可能なとき，a が満たす条件を求め，対角化せよ．

(信州大 2025)　　(m20251904)

13.19 a は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -2a \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ が対角化可能でないとき，a の値を求めよ．

(信州大 2026)　　(m20261904)

13.20 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ とし，E を 2 次の単位行列とする．A の固有値を $\alpha,\ \beta\quad(\alpha < \beta)$ とし，行列 $P,\ Q$ を

$$P = \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta E), \quad Q = \frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha E)$$

とする．下の問いに答えなさい．

(1) $\alpha,\ \beta$ を求めなさい．

(2) $P,\ Q,\ PQ,\ QP,\ P^2,\ Q^2$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 任意の自然数 n に対して $A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$ が成り立つことを，n に関する数学的帰納法を用いて示しなさい．

(長岡技科大 2025) (m20252102)

13.21 以下に示す行列の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(福井大 2025) (m20252405)

13.22 2 次正方行列 A に対して指数関数行列を

$$\exp[A] = E_2 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

と定義する．E_2 は 2 次正方行列の単位行列である．以下の問いに答えよ．

(1) P を正則行列とする．以下の等式が成立する事を示せ．

$$\exp[P^{-1}AP] = P^{-1}\exp[A]P$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．

(3) $\exp\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]$ を計算せよ．（ヒント：$\exp\left[\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\beta} \end{pmatrix}$ である．）

(福井大 2025) (m20252406)

13.23 次の行列 A に対して，以下の設問 (1), (2) に解答せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) A の逆行列が存在するか否かを判定し，存在する場合は逆行列を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．さらに，各固有値に対する固有ベクトルをひとつ求めよ．ただし，すべての固有ベクトルは単位ベクトルとし，その第一成分および第二成分は 0 以上となるように定めよ．

(福井大 2025) (m20252414)

13.24 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で，最大の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2025) (m20252422)

13.25 a を実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問に答えよ.

(1) 行列 A が $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を固有ベクトルにもつとき，実数 a の値を求めよ.

(2) a を (1) で求めた値とする．行列 A の固有値をすべて求めよ.

(3) $a=3$ とする．行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 次のベクトル $f,\ g,\ h$ が 1 次従属（線形従属）になるための a に関する条件を求めよ.

$$f=A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad g=A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad h=A\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2025) (m20252605)

13.26 行列 $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 固有値および各固有値に対応する固有ベクトルを全て求めよ.

(2) $A=B^2$ となる B を一つ求めよ.

(名古屋大 2025) (m20252802)

13.27 (1) 実対称行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ.

(2) $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底で，(1) の行列 A の固有ベクトルからなるものを一組求めよ.

(名古屋工業大 2025) (m20252905)

13.28 2×2 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A^2 を求めなさい.

(2) A の固有値をすべて求めなさい.

(3) x-y 平面上の原点を通る直線を A によって一次変換する．変換後の直線が変換前の直線に一致するものをすべて求めなさい.

(4) n を自然数として A^n を求めなさい.

(三重大 2025)　　(m20253101)

13.29 以下の問いに答えよ.

(1) 次式に示す行列 A の固有値を全て求めよ．また得られた最小の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．ただし固有ベクトルは正規化されていること.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(2) 対角化可能な N 次元行列 B の対角成分の和 (トレース) を $tr(B)$ とし，行列 B の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_N$ を用いて，$tr(B)$ が B の固有値の和に等しいことを示せ.
ただし $\mathbf{v}_k = \left[v_{1k},\ \cdots,\ v_{Nk}\right]^T$ $\quad (k = 1,\ \cdots,\ N,\quad [\bullet]^T$ は転置) であり，
トレースの公式を用いた場合には使った公式を示すこと.
(　$tr(B)$ が B の固有値の和に等しいことを示す公式を用いてはならない　)．

(3) 次式に示す連立方程式について，クラメルの公式を用いて $x,\ y,\ z$ の比が $x : y : z = |X| : |Y| : |Z|$ となる行列 $X,\ Y,\ Z$ をそれぞれ求めよ．ただし $\alpha_1\beta_2 \neq \alpha_2\beta_1$ とする.

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y - \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y - \gamma_2 z = 0 \end{cases}$$

(三重大 2025)　　(m20253113)

13.30 次の行列の固有値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0.95 & 0.72 & 0.83 & 0.63 \\ 0 & 0.63 & 0.56 & 0.24 \\ 0 & 0 & 0.42 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 \end{pmatrix}$

(京都大 2025)　　(m20253306)

13.31 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，A^n を求めよ.

(京都大 2025)　　(m20253307)

13.32 実ベクトル $\boldsymbol{x}^T = (x, y, z)$ の関数 $f(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy - 2axz + 2ayz$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．$\boldsymbol{x}^T$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す.

(1) 3 次対称行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ と表すとき，A を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) 2 次曲線 $f(\boldsymbol{x}) = 1$ が楕円体となるための必要十分条件を a を用いて表せ.

(大阪大 2025)　　(m20253501)

13.33 実数を成分とする 2 次正方行列 $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ に対して，4 次正方行列 $A \otimes B$ を

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$$

と定義する．このとき，以下の各問に答えよ.

(1) $(J+I)\otimes I$ を求めよ．ただし，I は 2 次の単位行列，J はすべての成分が 1 であるような 2 次正方行列とする．

(2) $J+I$ の固有値とその重複度を求めよ．

(3) $(J+I)\otimes I$ の固有値とその重複度を求めよ．

(神戸大 2025)　　(m20253801)

13.34 実数 a, b に対し，正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．次の問に答えよ．

(1) A が相異なる 3 つの実固有値をもつための，a, b についての条件を求めよ．

(2) (1) の条件が成り立つとする．このとき，A のそれぞれの固有値と，それに対応する固有ベクトルを 1 つずつ求めよ．

(3) (1) の条件が成り立つとする．このとき，P^TAP が対角行列となるような直交行列 P が存在するためには，a, b がどのような条件をみたせばよいか，また，その条件が成り立つとき，そのような直交行列 P を 1 つ求めよ．ただし，P^T は P の転置を表す．

(神戸大 2025)　　(m20253805)

13.35 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1-a & 0 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値の一つは 4 である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 実数 a の値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の残りの二つの固有値と，全固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^4 - 7\boldsymbol{A}^3 + 14\boldsymbol{A}^2$ を求めよ．また $\boldsymbol{B}$ の固有値を求めよ．

(広島大 2025)　　(m20254104)

13.36 A を 3 つの固有値 1, 2, 3 をもつ 3×3 行列とする．また

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 に対する A の固有ベクトル,

$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対する A の固有ベクトル,

$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$ は固有値 3 に対する A の固有ベクトル

であるとする．以下の問いに答えよ．

(1) A^2 のすべての固有値を求めよ．また，各固有値に対する固有ベクトルを 1 つ与えよ．

(2) 行列 A を求めよ．

(3) 行列 $A^5 - 6A^4 + 10A^3 - 10A$ を求めよ．

(4) 線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = (A^5 - 6A^4 + 10A^3 - 10A)\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

で定める．f が全単射であることを示せ.

(広島大 2025)　　(m20254106)

13.37 行列 $A = \begin{pmatrix} 6/5 & 2/5 & 0 \\ 2/5 & 9/5 & 0 \\ a-3 & 0 & a \end{pmatrix}$ が三つの固有値 $b,\ b+1,\ b+2$ をもつとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a,\ b$ は正の整数である.

(1) $a,\ b$ の値を求めよ.

(2) 全ての固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である.

(広島大 2026)　　(m20264104)

13.38 次の行列について固有値をすべて求めなさい．また，固有値が最大のときの固有ベクトルを求めなさい．固有ベクトルの長さは 1 とする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(山口大 2025)　　(m20254302)

13.39 次の行列 M の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ.

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(高知大 2025)　　(m20254502)

13.40 (1) 次の行列 A の固有値をすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) n 次正方行列 M は $M^2 = M$ を満たすとする．M の固有値，固有ベクトルをそれぞれ $\lambda,\ \boldsymbol{v}$ とすると，$\lambda\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}$ が成り立つことを示せ.

(3) M は 0, 1 以外の固有値を持たないことを示せ.

(4) $\det M \neq 0 \Leftrightarrow M = I$ を示せ．ただし，$\det M$ は M の行列式，I は n 次の単位行列を表す.

(九州大 2025)　　(m20254702)

13.41 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) 適当な直交行列 P により，$P^{-1}AP$ が対角行列になる．そのような直交行列 P を 1 つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ も求めよ.

(宮崎大 2025)　　(m20255301)

13.42　次の行列 A がある．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

(1)　行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2)　行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3)　行列 A の固有値を求めよ．

(鹿児島大 2025)　　(m20255405)

13.43　次の行列 A がある．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)　行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2)　行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3)　行列 A の固有値を求めよ．

(鹿児島大 2025)　　(m20255410)

13.44　次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めて対角化しなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2025)　　(m20255422)

13.45　行列 $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ について，$C\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるすべてのスカラー λ とそれぞれの λ に対応したベクトル $\boldsymbol{x}$ を 1 つ求めなさい．ただし，$\boldsymbol{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．

(鹿児島大 2025)　　(m20255430)

13.46　行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(1)　行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2)　行列 A の対角化を利用し，A^3 を求めよ． 対角化を利用したことが分かるように途中式を示すこと．

(香川大 2025)　　(m20255705)

13.47　$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ p \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix}$ が $A\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}$，$A\boldsymbol{v} = \beta\boldsymbol{v}$，$\alpha < \beta$ を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1)　α，β，p，q の値を求めよ．

(2)　n を正整数とする時，$A^n\boldsymbol{u}$，$A^n\boldsymbol{v}$ を求めよ．

(3)　A^n を求めよ．

(東京都立大 2025)　　(m20255901)

13.48 実対称行列 B の異なる固有値 λ_i, λ_j に属するそれぞれの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_j$ は直交することを証明せよ.

(東京都立大 2025) (m20255905)

13.49 3 次正方行列 A と実ベクトル $\boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$) を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とし，関数 $f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{{}^t\boldsymbol{r}A\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}$ と定める．ただし，${}^t\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r}$ の転置を表す．以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) (1) で求めたすべての固有ベクトルを用いて，${}^tPP = I$（I は単位行列）を満たす行列 P を求めよ．さらに，P を用いて $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = P\boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

と変換する．このときの $f(\boldsymbol{r})$ を X, Y，および Z を用いて表せ.

(3) $f(\boldsymbol{r})$ の最大値および最小値をそれぞれ求めよ．さらに，このときの $\boldsymbol{r}$ をすべて求めよ.

(はこだて未来大 2025) (m20256301)

14 線形空間など

14.1 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を次のように定める.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

また，$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を，$f \circ f = f$ を満たす線型写像とする.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底になっていることを示せ.

(2) $\mathrm{Im}\, f$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ となることを示せ.

(3) 次の 2 つが成り立つとき，$\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ.

$$\mathrm{Im}\, f = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle, \qquad \mathrm{Ker}\, f = \langle \boldsymbol{c} \rangle$$

ただし，$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ とは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間，$\langle \boldsymbol{c} \rangle$ とは $\boldsymbol{c}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間のことである.

(お茶の水女子大 2025) (m20250603)

14.2 3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と定義する．線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定める．さらに,

$$\boldsymbol{v}_1 = f(\boldsymbol{e}_1), \quad \boldsymbol{v}_2 = f(\boldsymbol{e}_2)$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{e}_3)$ を $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の一次結合で表せ.

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ を $V = \mathrm{Im}\, f$ とおく. 線形写像 $g\ :\ V \to V$ を $g(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in V)$ で定める. このとき, V の基底 $(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)$ に関する g の表現行列 B を求めよ.

(3) I を 2 次単位行列とするとき, $B^2 = \alpha B + \beta I$ となる実数 $\alpha,\ \beta$ を求めよ.

(電気通信大 2025) (m20251002)

14.3 実数を成分とする n 次正方行列全体からなる集合 $M_n(\mathbb{R})$ を行列の和とスカラー倍を演算する $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなす. 行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ のトレース $\mathrm{tr}\, A$ は, A の対角成分の総和として

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

で定まる. 以下の問いに答えよ.

(1) $(i,\ j)$ 成分が 1 で他のすべての成分が 0 であるような n 次正方行列を E_{ij} で表す. n^2 個の行列 E_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

(2) 写像 $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $f(A) = \mathrm{tr}\, A$ で定める. このとき f は線形写像であることを示せ.

(3) $M_n(\mathbb{R})$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ \middle|\ \mathrm{tr}\, A = 0 \right\}$$

で定める. このとき, V は $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示し, その次元 $\dim V$ を求めよ. .

(4) 正則行列 $P \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, $M_n(\mathbb{R})$ の部分集合 W を

$$W = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \ \middle|\ \mathrm{tr}\, (P^{-1}AP) = 0 \right\}$$

で定める. このとき, W は $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示し, その次元 $\dim W$ を求めよ. .

(筑波大 2025) (m20251313)

14.4 α を実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 2\alpha & \alpha+1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha-3 & 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1,\ \cdots,\ 5)$ を A の第 i 列のベクトルとする. すなわち, $A = \big(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\big)$ となる. また, $f_A\ :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ が線形従属となる実数 α の値を求めよ. また, このとき, f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A$ の次元を求めよ.

(2) A が正則かつ A および A^{-1} の成分がすべて整数となるような正の実数 α を求めよ. また, このとき, A^{-1} を求めよ.

(3) (2) で求めた α に対して, A のすべての 4×4 小行列の行列式の最大公約数を求めよ.

(筑波大 2026) (m20261313)

14.5 $X,\ Y,\ Z$ を集合として, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の写像 $f\ :\ X \to Y$ に対して, 集合 W と全射 $g\ :\ X \to W$ と単射 $h\ :\ W \to Y$ が存在し, $f = h \circ g$ を満たすことを示せ.

(2) $f: X \to Y$ を全射とし，$g_1: Y \to Z$ と $g_2: Y \to Z$ を写像とする．$g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つことを示せ．

(3) $f: X \to Y$ が全単射であるとき，写像 $g: Y \to X$ が存在して，$g \circ f = \mathrm{id}_X$，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たすことを示せ．ただし，$\mathrm{id}_X: X \to X, \quad \mathrm{id}_Y: Y \to Y$ は恒等写像であるとする．

(筑波大 2026)　　(m20261315)

14.6 以下の各小問に答えよ

(1) 集合 A から集合 B への写像 f が単射であることの定義を述べよ．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線形写像 T が $T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \qquad \left(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\right)$ で与えられるとき，写像 T は単射ではないことを示せ．

(茨城大 2025)　　(m20251702)

14.7 $\mathbb{R}$ を実数全体の集合，$\mathbb{R}^n$ を n 次元列ベクトル空間とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

を考える．また，線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ で定める．

(1) 行列 A の階数（ランク）を求めよ．

(2) 線形写像 f の像の次元，およびその基底を一組求めよ．

(3) 線形写像 f の核の次元，およびその基底を一組求めよ．

(信州大 2025)　　(m20251905)

14.8 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような，実正則行列 P を一つ求めよ．

(2) $M(3;\mathbb{R})$ で実数を成分とする 3 次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$-線形空間を表す．実数 μ に対して

$$W(\mu) = \left\{ X \in M(3;\mathbb{R}) \;\middle|\; AX = \mu XA \right\}$$

と定める．このとき $W(\mu)$ は $M(3;\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$-部分空間であることを示せ．

(3) 実数 λ に対して

$$V(\lambda) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \right\}$$

と定める．$X \in W(\mu)$ かつ $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ ならば，$X\boldsymbol{v} \in V(\lambda\mu)$ であることを示せ．

(4) $W(3) = \{O\}$ となることを示せ．ただし，O は零行列を表す．

(5) $W(2) \neq \{O\}$ となることを示せ．

(信州大 2025)　　(m20251906)

14.9 次の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

A の定める線形写像 $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列の基本変形を行うことにより A の階数を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元および 1 組の基底を求めよ．

(3) $\mathrm{Ker}\, T_A$ の次元および 1 組の基底を求めよ．

(富山大 2026)　　(m20262302)

14.10 X, Y を空ではない集合とし，$f : X \to Y$ を写像とする．次の問いに答えよ．

(1) A を X の部分集合とするとき，$A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ を示せ．

(2) 次の (a) と (b) が同値であることを示せ．

(a) f は単射である．

(b) X の任意の部分集合 A に対して $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ である．

(富山大 2026)　　(m20262303)

14.11 次の問いに答えよ．

(1) 集合 X 上の同値関係の定義を述べよ．

(2) 集合 X 上の同値関係 $\sim$ について，$x \in X$ の同値類を $[x]$ と表す． $[x] \neq [y]$ であることと，$[x] \cap [y] = \emptyset$ であることが同値であことを証明せよ．ただし，$\emptyset$ は空集合を表す記号である．

(3) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $x \sim y$ を，ある整数 n が存在して $x - y = n$ となることと定義する．
$\sim$ が $\mathbb{R}$ 上の同値関係であることを証明せよ．

(富山大 2026)　　(m20262304)

14.12 連立方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & -4 & -10 & -9 & -9 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たすベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ の集合を V とする．V の基底を一組求めよ．

(福井大 2025)　　(m20252404)

14.13 実変数の実数値関数全体からなる実ベクトル空間において，次のベクトルの各組が 1 次独立かどうかを判定せよ．ただし，e は自然対数の底を表すとする．

(1) e, e^x, e^{x+1}

(2) $1,\ x,\ (1+x)e^x$

(神戸大 2025) (m20253802)

14.14 4 次の正方行列 A は，重複度 2 の固有値 1 と，重複度 1 の固有値 2，重複度 1 の固有値 3 をもつとする．また，ベクトル $(1,0,1,0)^T$ は固有値 1 に対応する固有ベクトル，ベクトル $(1,1,0,1)^T$ は固有値 2 に対応する固有ベクトルであるとする．このとき，次の問に答えよ．ただし，I は単位行列，$*^T$ は $*$ の転置を表す．

(1) $\operatorname{rank} A$ を求めよ．

(2) $\dim \operatorname{Im}(A-2I)$ を求めよ．

(3) $x=(0,-1,1,-1)^T$ とする．このとき，正の整数 n に対して，$A^n x$ を求めよ．

(4) $x=(0,-1,1,-1)^T$ とする．このとき，$Ay=x$ となる y を求めよ．

(神戸大 2025) (m20253807)

14.15 3×3 行列 $A,\ B$ を

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値を求めよ．また，各固有値 λ に対して，固有空間
$V(\lambda)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^3 \;\middle|\; A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\right\}$ の基底を 1 組与えよ．

(2) A の各固有値 λ に対して $W(\lambda)=\left\{A\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^3\right\}$ の次元を求めよ．

(3) 次の 2 つの条件を満たすベクトル $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\in\mathbb{C}^3$ を 1 組与えよ．

- $j=1,2,3$ について，$\boldsymbol{p}_j$ は A の固有ベクトルであり，かつ，B の固有ベクトルでもある．
- $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である．

(4) 2×2 行列 $C,\ D$ を

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，C と D の両方の固有ベクトルであるような $\boldsymbol{p}\in\mathbb{C}^2$ は存在しないことを示せ．

(広島大 2025) (m20254108)

応用数学

15 応用数学

15.1 周期 2π の周期関数 $f(x)=f(x+2\pi)$ が，区間 $[-\pi,\pi)$ に対しては式 (1) で定義されている．この周期関数 $f(x)$ を式 (2) のようにフーリエ級数に展開する場合の各係数 $a_0,\ a_n,\ b_n$ を求めなさい．

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x < \pi\right) \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \} \tag{2}$$

(北海道大 2025)　　　(m20250103)

15.2　点 O$(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，次の問に答えよ．

(1)　点 A の座標を $(a,0,0)$，点 B の座標を $(0,b,0)$，点 C の座標を $(0,0,c)$ とする．三角形 $\triangle$ABC の面積を S とし，頂点の位置ベクトルを $\mathbf{D} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\mathbf{E} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\mathbf{F} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．

(a)　面積 S は次式で与えられることを示せ．

$$S = \frac{1}{2} \left| \mathbf{D} \times \mathbf{E} + \mathbf{E} \times \mathbf{F} + \mathbf{F} \times \mathbf{D} \right|$$

(b)　面積 S を求めよ．

(2)　次のベクトル場 $\mathbf{G}$ の発散を求めよ．

$$\mathbf{G} = (3xy,\ x^2 y,\ y^2 z)$$

(3)　次のベクトル場 $\mathbf{H}$ の回転を求めよ．

$$\mathbf{H} = (z,\ x^2,\ 2y)$$

(4)　xyz 空間における各軸方向の基本ベクトルを $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ とし，位置ベクトルを $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ とする．また，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と平面 $x + y + z = 1$ の交線を Q とする．
このとき，次のベクトル場 $\mathbf{P}$ の線積分 $\displaystyle\oint_Q \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよ．

$$\mathbf{P} = z\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$$

(東北大 2025)　　　(m20250505)

15.3　i を虚数単位，z を複素数，x，y は実数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　正則な関数 $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ において，実部が $u(x,y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ で与えられているとき，以下の問いに答えよ．

(a)　$v(0,0) = 0$ であるとき，実関数 $v(x,y)$ を求めよ．

(b)　$f(z)$ を z の関数として表せ．

(2)　以下で与えられる円周を反時計回りに一周する積分路 C において，積分

$$\int_C \frac{dz}{z^2(z^2 + 4z + 8)}$$

の値を求めよ．

(a)　C ： $|z| = 1$

(b)　C ： $|z - 4i| = 3$

(c)　C ： $|z + 3 + 3i| = 5$

(3)　以下の左辺の実数積分は，実数 A，B を使って右辺に示す形に帰着できる．

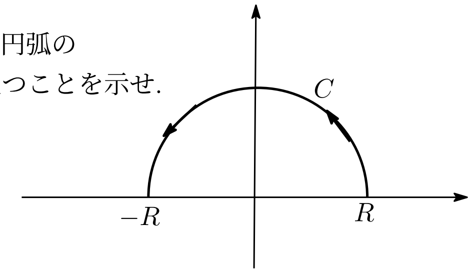
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5 - 1} dx = A \sin B$$

(a)　複素関数 $f(z) = \dfrac{z-1}{z^5 - 1}$ に関して，全ての特異点を求めよ．またそのうち，除去可能なものがあればそれを答えよ．

(b) 複素平面において，右図に示すような半径 R の半円弧の積分路 C を考える．このとき，次のことが成り立つことを示せ．

$$\lim_{R \to \infty} \int_C \frac{z-1}{z^5-1} dz = 0$$

(c) A, B の値を求めよ．



(東京大 2025)　　(m20250703)

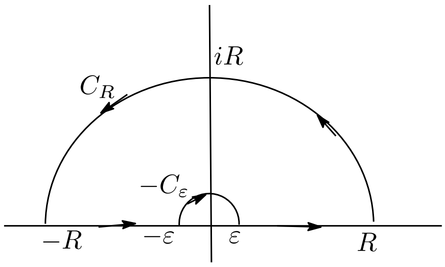
15.4　複素関数 $f(z) = \dfrac{1-e^{iz}}{z^2}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) $f(z) = \dfrac{\alpha}{z} + g(z)$ （ α は定数，$g(z)$ は複素平面上で正則 ）と表すとき，α の値を求めよ．

(2) $r > 0$ に対して，$C_r : z = re^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，$\displaystyle\int_{C_r} \frac{dz}{z}$ を計算せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{r \to +0} \int_{C_r} f(z)dz$, $\displaystyle\lim_{r \to \infty} \int_{C_r} f(z)dz$ を求めよ．

(4) $f(z)$ を下図の積分路に沿って積分し，$\varepsilon \to +0$, $R \to \infty$ として，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ を求めよ．ただし，$-C_\varepsilon$ は C_ε を逆向きにした積分路を表す．



(電気通信大 2025)　　(m20251006)

15.5　i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) 複素平面上の 2 点 $2i$ と $-i$ からの距離が 2 ： 1 である点の集合が円となることを複素変数 z を用いて示せ．また，その円の中心と半径を求めよ．

(2) (1) で指定された z 平面上の円を複素関数 $w = 1/z$ により w 平面上に変換した像を図示せよ．

(筑波大 2026)　　(m20261303)

15.6　(1) 基本周期が以下で与えられる関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

$$f(x) = -2x \quad (-1 \leq x < 1)$$

(2) 基本周期が以下で与えられる関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

$$f(x) = -2x - 1 \quad (-1 \leq x < 1)$$

(福井大 2025)　　(m20252409)

15.7　互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による三次元直交座標系における
ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (2xz + y + z)\boldsymbol{i} + (2yz - x - z)\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\boldsymbol{k}$,
および，3 点 O$(0,0,0)$, P$(1,1,1)$, Q$(1,-1,2)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の回転 rot$\boldsymbol{f}$ を求めよ．

(2) 3 点 O, P, Q を通る平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．

(3) 三角形 OPQ の面積 S を求めよ．

(4) 三角形 OPQ の周上を O → P → Q → O の順に一周する経路を C とする．
C に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の線積分
$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ．ただし，$d\boldsymbol{r}$ は C 上の線素ベクトルとする．

(名古屋大 2025)　　(m20252801)

15.8 3 次元のベクトル関数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ を

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^{n/2}}\ ,\ \frac{x}{(x^2+y^2)^{n/2}}\ ,\ z\right)$$

とする．ただし，$(x,y)\neq(0,0)$ であり，n は非負の整数である．

(1) 原点を中心とする x-y 平面上の半径 1 の円を C とする．$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ を C に沿って線積分しなさい．ただし，C の正の向きは z 軸の正方向に対して右ねじの関係をもつとする．

(2) $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ の発散を求めなさい．また，$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ の回転を求めなさい．

(三重大 2025)　　(m20253102)

15.9 オイラーの公式について，以下の文章中の ①〜⑥ に当てはまる式を答えなさい．

実数 t を変数とする関数 $f(t)$ がマクローリン展開可能であるとき，n を整数とし，$f(t)$ の n 回微分を $f^{(n)}(t)$ と書くと，$f(t)$ のマクローリン展開は次式で書き表される．

$$① \quad f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{}\cdot t^n=\boxed{}+\boxed{}\cdot t+\boxed{}\cdot t^2+\cdots$$

この定義に従い，正弦関数および余弦関数の各々のマクローリン展開を，<u>ゼロ以外の第 5 項まで</u>のマクローリン級数として記述すると次式となる．

$$② \quad \sin t=\boxed{}\cdots \quad , \qquad ③ \quad \cos t=\boxed{}\cdots$$

一方虚数単位を j とし，ネイピア数（自然対数の底）を e としたときの関数 e^{jt} のマクローリン展開を <u>ゼロ以外の第 8 項まで</u> のマクローリン級数として記述すると次式となる．

$$④ \quad e^{jt}=\boxed{}\cdots$$

従って，この ④ の式と上記の ② および ③ の式との比較により，次のオイラーの公式が得られる．

$$⑤ \quad e^{jt}=\boxed{}$$

いま，t を媒介変数として $x=r\cdot\sin t$, $y=r\cdot\cos t$ （r は実数定数）の媒介変数表示で x-y 平面上の曲線 C を仮定すると，C の長さ L は $0\leq t\leq 2\pi$（単位はラジアン）の範囲で次式となる．

$$⑥ \quad L=\boxed{}$$

これは，$0\leq t\leq 2\pi$ の範囲で $r\cdot e^{jt}$ が複素平面上に描く曲線の長さに等しく，またその曲線は曲線 C と同じ形状を持つ．

(三重大 2025)　　(m20253111)

15.10 ある積分について，以下の文章中の ①, ② に当てはまる式を答え，③ にグラフを描きなさい．

時刻 t を変数とする 2 つの関数 $f(t)$ および $g(t)$ が次式で定義されている．

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 10 \cdot e^{-10t} & , \quad t \ge 0 \end{cases}$$

ここで $f(t)$ と $g(t)$ についての下記の積分（式中の u は実数変数）を求めることを考える．

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u) \cdot g(t-u)\, du$$

まず $0 \le t \le 1$ の定義域では，積分範囲 $0 \le u \le t$ において $f(u) = 1$ であるので，上記 $g(t)$ の定義式を代入して次式を得る．

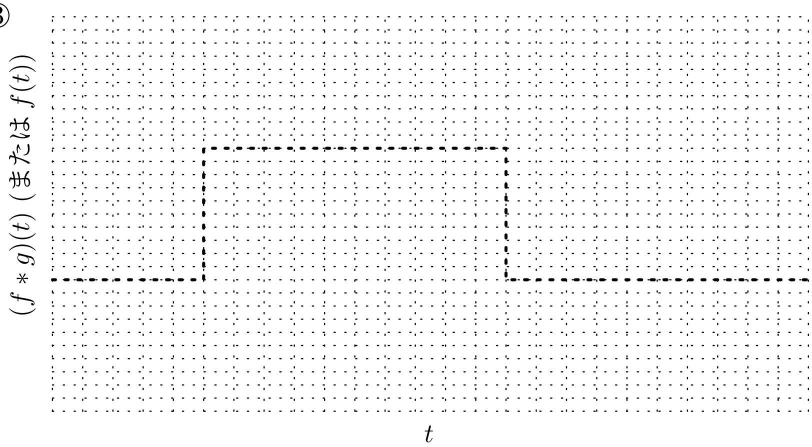
$$① \quad (f * g)(t) = \int_0^{\square} \boxed{}\, du = \boxed{}, \quad 0 \le t \le 1$$

つぎに $t > 1$ の定義域では，積分範囲 $0 \le u \le t$ のうち，$0 \le u \le 1$ において $f(u) = 1$ であり，$1 < u \le t$ において $f(u) = 0$ であるので，上記 $g(t)$ の定義式を代入して次式を得る．

$$② \quad (f * g)(t) = \int_0^{\square} \boxed{}\, du = \boxed{}, \quad t > 1$$

上記の ① および ② の式より，横軸に時刻 t，縦軸に関数 $(f * g)(t)$ をとりグラフを描くと下図のようになる（図中の点線は $f(t)$ を示す）．

③



※図中には，$(f * g)(t)$ の波形のみならず，横軸と縦軸を書き入れるとともに，

それら軸上には，必要不可欠と考える数値も書き込むこと．

(三重大 2025)　　(m20253112)

15.11 関数 $u(x,t) = X(x)T(t)$ を考える．$u(x,t)$ は以下の条件を満足する．

$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty)$$

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad (0 \le x \le 2)$$

以下の微分方程式を解き，関数 $u(x,t)$ を求めよ．

$$\frac{dT(t)}{dt} + \lambda T(t) = 0$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda X(x) = 0$$

ただし，λ は定数とする．

(京都大 2025)　　(m20253303)

15.12 複素数 $z = x + iy$ （i は虚数単位とする）を変数とする複素関数

$$f(z) = \frac{1 - e^{-3z}}{z} \cdot \frac{2}{2+z} \cdot \frac{5}{5+z}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の除去可能な特異点ならびに極をすべて列挙せよ．

以降では，除去可能な特異点における $f(z)$ の値は，その近傍で $f(z)$ が正則となるように定めるものとする．

(2) $z = -2$ を中心とし半径が $d\,(d > 0)$ である円の内部を $A(d)$ とする．

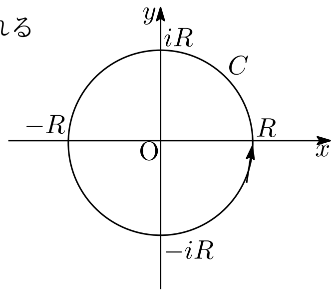
$$A(d) = \{z\,;\ |z+2| < d\}$$

$f(z)$ が $A(d)$ 上で $z = -2$ を除いて正則となる d の範囲を求めよ．

(3) d が上記の (2) において求めた範囲に含まれるとする．このとき，$A(d)$ 上における $f(z)$ の $z = -2$ のまわりでのローラン展開を考え，その $(z+2)^n$ の係数を a_n とする．a_{-1} と a_0 を求めよ．

(4) 右図に示す，複素平面上における原点 O を中心とし半径が R の円を考える．この円周上を $z = R$ から反時計回りにちょうど一周する経路を C とする．$2 < R < 5$ のとき，次式で定義される積分値 I を計算せよ．

$$I = \int_C f(z)dz$$



(大阪大 2025)　　(m20253503)

15.13 2 次元デカルト座標系におけるスカラー場 $f(x, y) = x^2(y+1)$ を考える．以下の小問に答えよ．

(1) スカラー場の勾配 $\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) 原点 $O(x = 0,\ y = 0)$ を始点として点 $A(x = 1,\ y = 0)$ に至る直線を積分経路 C にもつ以下の線積分 I_C を求めよ．

$$I_C = \int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r}$$

(3) (2) において，積分経路 C を原点 $O(x = 0,\ y = 0)$ を始点とし点 $B(x = 1,\ y = 2)$ に至る直線とした場合の線積分 I_C を求めよ．

(高知大 2025)　　(m20254501)

15.14 デカルト座標系 xyz においてベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = \boldsymbol{r} = [x, y, z]$ を定義する．

(1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ を示せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ のスカラーポテンシャル ϕ を，$\phi(0, 0, 0) = 0$ のもとで求めよ．なお，$\nabla|\boldsymbol{r}|^2 = 2\boldsymbol{r}$ を用いてもよい．ただし，$|\boldsymbol{r}|$ は $\boldsymbol{r}$ の長さである

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ にある閉曲線 C 上の周回積分 $\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(東京都立大 2025)　　(m20255904)

確率統計

16　確率統計

16.1　以下の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 2 個のさいころを同時にふるとき，出た目の和が 5 以下になる確率を求めよ．

(2) 1 個のさいころを 3 回ふるとき，出た目の積が 5 の倍数となる確率を求めよ．

(3) n 個のさいころを同時にふるとき，出た目の最小値が 3 である確率を求めよ．
ただし，n は 2 以上の自然数とする．

(お茶の水女子大 2025)　　(m20250609)

16.2　白玉が 3 個，赤玉が 3 個の合計 6 個の玉がある．6 個の玉から無作為に 3 個を選び箱 A に入れ，残りの 3 個を箱 B に入れる．この状態を初期状態とする．1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する．非負の整数 n に対して確率 P_n, Q_n, R_n, S_n を，この試行を n 回繰り返したときに箱 A に白玉がそれぞれ 3 個，2 個，1 個，0 個入っている確率を表すものとする．ただし，$n = 0$ のときは交換を行う前の初期状態を表す．

(1) 初期状態の確率 P_0, Q_0, R_0, S_0 を求めよ．

(2) P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1}, S_{n+1} を P_n, Q_n, R_n, S_n で表せ．

(3) 1 回目の試行の後に箱 A に白玉が 2 個あったときに，初期状態で箱 A に白玉が 2 個入っていた確率を求めよ．

(4) 初期状態で白玉が 3 個とも箱 A に入っていた場合を考える．
$X_n = Q_n + R_n$, $Y_n = Q_n - R_n$ とおく．

(a) X_n を求めよ．

(b) Y_n を求めよ．

(c) Q_n を求めよ．

(d) 試行を無限回繰り返したときに箱 A に入っている白玉の個数の期待値を求めよ．

答えだけでなく数式により過程も示すこと．

(東京大 2025)　　(m20250702)

16.3　確率 p で成功し，確率 $1-p$ で失敗する独立な実験を n 回繰り返す．X_i は i 回目の実験に成功したときに $X_i = 1$，失敗したときに $X_i = 0$ となる確率変数である．$P(E)$ は事象 E が起こる確率を表す．

(1) 以下の確率変数 Y は n 回の実験における成功割合を表す．確率変数 Y の期待値と分散を求めよ．

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(2) 確率 p_1, p_2, $\cdots$, p_n で値 z_1, z_2, $\cdots$, z_n をとる確率変数 Z の期待値を μ，分散を σ^2 とする．ただし，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とし，$\sigma^2 > 0$ とする．このとき，実数 $t > 0$ に対して，分散 σ^2 の定義式を用いて以下の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$P\left(|Z - \mu| \geq t\sigma\right) \leq \frac{1}{t^2}$$

(3) 独立な実験を 2500 回繰り返したとき，0.99 以上の確率で成功する割合 Y が期待値 $\pm\, 0.1$ の範囲で収まることを，(2) の不等式を用いて証明せよ．

(筑波大 2025)　　　(m20251311)

16.4　A 県と B 県において，ある政党への支持率を調査した．A 県から無作為に抽出した 300 人のうち 90 人，B 県から無作為に抽出した 200 人のうち 35 人が支持すると回答した．A 県と B 県の政党支持率をそれぞれ p_A と p_B とする．必要に応じて付表を参照すること．

(1)　政党支持率 p_A は 4 割未満であると言えるか，有意水準 5% で検定せよ．

(2)　政党支持率 p_A と p_B に差があると言えるか，有意水準 5% で検定せよ．

付表 1：標準正規分布表

付表 2：

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{6} = 2.449$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{10} = 3.162$

(筑波大 2025)　　　(m20251312)

16.5　定数 $\lambda > 0$ に対して，以下の確率分布に従う確率変数 X を考える．

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

ただし，e は自然対数の底である．

(1)　以下の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$$

(2)　確率変数 X の期待値を求めよ．

(3)　確率変数 $X(X-1)$ の期待値を求めよ．

(4)　確率変数 X の分散を求めよ．

(筑波大 2026)　　　(m20261309)

16.6　以下のデータは正規母集団から無作為に抽出された標本とする．

$$11,\ 19,\ 2,\ 16,\ 13,\ 6,\ 0,\ 10,\ 18,\ 5$$

必要に応じて付表を参照し，解答は四捨五入して小数点以下第 1 位まで求めること．

(1)　標本の平均 m と不偏分散 u^2 を求めよ．

(2)　母分散 $\sigma^2 = 50$ が既知のとき，母平均 μ の 95 %信頼区間を求めよ．

(3)　母分散が未知のとき，母平均 μ の 95 %信頼区間を求めよ．

(筑波大 2026)　　　(m20261310)

16.7　次の文章を読んで，(1)，(2)，(3)，(4)，(5) に答えよ．

ある工場では，$\dfrac{5}{1000}$ の確率で不良品が作られてしまう製造装置 A を用いて製品を製造している．
市場に出荷される不良品の数を抑えるため，以下の特徴を持つ検査装置 B の導入を検討することとなった．

検査装置 B の特徴

- 検査対象の製品が不良品であれば $\dfrac{99}{100}$ の確率で不良品と判定し，不良品検出のアラームが鳴る．
- 検査対象の製品が不良品でない場合も $\dfrac{5}{100}$ の確率で不良品と判定し，不良品検出のアラームが鳴る．

(1) 製造装置 A で 20000 個の製品を製造し．そのすべての製品を検査装置 B にて検査することを考える．このとき，検査装置 B にて不良品検出のアラームは鳴るが，実際には不良品ではない製品の個数の期待値を求めよ．

(2) 製造装置 A で製造した製品を検査装置 B で検査し不良品検出のアラームが鳴ったとき，その検査対象の製品が真に不良品である確率を求めよ．なお，確率の導出過程についても述べること．

(3) 製造装置 A が製造した製品について，検査装置 B が不良品か否かを正しく判定する確率を求めよ．なお，確率の導出過程についても述べること．

工場への検査装置 B の導入を検討していると，以下の特徴を持つ別の検査装置 C の存在が明らかとなり，どちらか一方を工場へ導入することとなった．

検査装置 C の特徴

- 検査対象の製品が不良品であれば $\dfrac{95}{100}$ の確率で不良品と判定し，不良品検出のアラームが鳴る．
- 検査対象の製品が不良品でない場合も $\dfrac{1}{100}$ の確率で不良品と判定し，不良品検出のアラームが鳴る．

(4) 製造装置 A が製造した製品について，検査装置 C が不良品か否かを正しく判定する確率を求めよ．なお，確率の導出過程についても述べること．

(5) 検査装置 B か検査装置 C のどちらを導入すべきか意見を求められたとき，あなたであればどのように返答するか理由とともに述べよ．

(群馬大 2025)　　(m20251502)

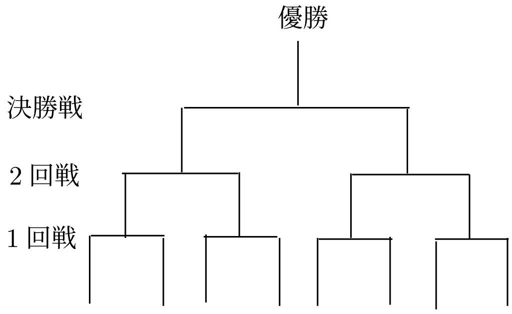
16.8 A，B の 2 人を含む 8 人が下図のようなトーナメント方式で優勝を争う．トーナメントの組み合わせは無作為に決めるものとし，それぞれの試合でどちらが勝つ確率も $\dfrac{1}{2}$ であるとする．下の問いに答えなさい．

(1) A が優勝する確率を求めなさい．

(2) A と B が 1 回戦で対決する確率を求めなさい．

(3) A と B が決勝戦で対決する確率を求めなさい．

(4) A と B がどこかで対決する確率を求めなさい．



(長岡技科大 2025)　　(m20252104)

16.9 (その 1)

各面の目が 1，2，3，4，5，6 であるサイコロ 1 個を投げる操作を n 回繰り返す．このとき，

(1) 1 の目が出る回数の合計が k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ となる確率 P_k を求めよ．

(2) k の期待値 E を求めよ．途中式も示すこと．ただし，

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, p^k q^{n-k}$$

$$k\ {}_n\mathrm{C}_k = n\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

が成り立つことを用いてよい．

(その 2)

連続型の 2 つの確率変数 X, Y が同時確率密度関数

$$f_{XY}(x,y) = ae^{-(x^2+y^2)}$$

に従うとする．ただし，a は正の定数とする．

(3) a の値を求めよ．ここで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

であることは既知としてよい．

(4) $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ となることを示せ．
ここで，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ はそれぞれ，X, Y の周辺確率密度関数である．

(福井大 2025)　　(m20252407)

16.10 D 球団の O 選手は，2024 年中の MLB の試合において 648 回打席に立つと予想されている．O 選手の 1 年間の安打数を表す確率変数を X とする．ただし，打席結果は安打を打つか凡退するかの 2 通りしかないとする．O 選手がシーズン終了まで現在の打率 1/3 を維持し続けると仮定して，以下の小問に答えよ．なお，解答するにあたっては，必要に応じて次ページの標準正規分布表を用いてもよい．

(1) X が従う確率分布をそのパラメータとともに答えよ．

(2) X の確率密度関数を求めよ．

(3) 正規分布による近似を用いて，O 選手が年間 195 本以上安打を打つ確率を求めよ．ただし，計算結果は小数第五位を四捨五入して，小数第四位までで解答すること．

(岐阜大 2025)　　(m20252603)

16.11 赤色の玉が 1 個，黄色の球が 1 個，青色の玉が 1 個，合計 3 個の玉が入っている袋がある．この袋の中から玉を 1 個取り出し，その玉の色を確認して元に戻すという操作を n 回 $(n \geqq 3)$ 繰り返す．このとき，取り出した n 個の玉の色が 1 種類である確率を p_n，2 種類である確率を q_n, 3 種類である確率を r_n とする．次の問いに答えよ．ただし，答えが分数になるときは既約分数で答えよ．また，必要ならば，$2^{12} = 4096$，$3^{12} = 531441$ であることは用いてよい．

ア．p_3 を求めよ．

イ．q_3 を求めよ．

ウ．$n = 3$ のとき，取り出した 3 個の玉の色の種類の数 X の期待値を求めよ．

エ．r_{12} を求めよ．

(豊橋技科大 2025)　　(m20252704)

16.12 M 個の白球を N 人に分配するときの球の並べ方の数 W を考え，$M \geq N \geq 1$ とする．今，1 番目から N 番目までの人に対して白球の分配が行われたとする．このとき，1 番目の人の手持ちの白球を左から右へ順にすべて並べ，2 番目の人との区別のために 1 個の黒球を並べる．続いて 2 番目の人の手持ちの白球をすべてその右に並べ，以下同様に並べていき，N 番目の人の白球を並べて終了とする．

例として，3 人に対して 3 個の白球を配分するとき，最初の人に 3 個の白球を配分したときの

球の配列は　○○○●● となる．以下の問いに答えよ．

(1) 白球と黒球にそれぞれ異なる数字を付けて全ての白球と黒球が区別できるとき，$M = 4$, $N = 3$ における球の並べ方の数 W を求めよ．

(2) 白球と黒球がそれぞれ区別できないとき，球の並べ方の数 W を M および N を用いて表せ．

(3) 白球と黒球がそれぞれ区別できないとき，$M = 4$, $N = 3$ おける球の並べ方の数 W を求めよ．

(名古屋大 2025)　　(m20252804)

16.13 次の関数 $f(x)$ の確率密度関数にもつ確率変数 X がある．

$$f(x) = \begin{cases} c\cos x & \left(-\dfrac{1}{2}\pi \leq x \leq \dfrac{1}{2}\pi\right) \\ 0 & \left(x < -\dfrac{1}{2}\pi,\ x > \dfrac{1}{2}\pi\right) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 定数 c の値を定めよ．

(2) (1) で定めた定数 c の値を用いて，X の分布関数（累積分布関数）$F(x)$ を求めよ．

(3) (1) で定めた定数 c の値を用いて，X の平均を求めよ．

(4) (1) で定めた定数 c の値を用いて，X の分散を求めよ．

(三重大 2025)　　(m20253114)

16.14 1 つのモータと n 個の歯車を使ってできている機械がある．モータが不良品である確率を p，1 つの歯車が不良品である確率を q とする．この機械を構成する他の部品には不良品は無いものとする．モータや歯車に 1 つでも不良品があればこの機械は正常に動作しない不良品となり，そうでない場合には正常に動作するとする．

(1)〜(3) に答えよ．

(1) この機械に 2 つ以上の不良品の歯車が用いられる確率を求めよ．

(2) もしこの機械が不良品である場合に，モータが不良品である確率を求めよ．

(3) $p = q = 0.04$ のときに，この機械が不良品となる確率が 0.5 以上となる最小の n の値を求めよ．ただし，$\log_{10} 2$ は 0.301，$\log_{10} 3$ は 0.477 として計算してよい．

(京都大 2025)　　(m20253304)

16.15 (1) ある自動車メーカーでは，3 つの工場 A，B，C である部品を作っている．工場 A，B，C で作った部品の中にはそれぞれ 3%, 2%, 4% の割合で不良品が含まれていることがわかっている．また，この自動車メーカーでは，部品全体の 40% を工場 A で，30% を工場 B で，30% を工場 C で作っている．今，無作為に部品を 1 つ抽出する．以下の問いに答えよ．

(1-1) 抽出した部品が不良品であり，かつ工場 A で作られたものである確率を求めよ．

(1-2) 抽出した部品が不良品である確率を求めよ．

(1-3) 抽出した部品が不良品であるという条件の下で，それが工場 A で作られたものである確率を求めよ.

(2) 以下の表は，あるトレーディングカードショップで販売されているカードを無作為に 5 つ抽出し，価格と在庫数を調べた結果である．価格と在庫数の相関係数 r は -1 であった．以下の問いに答えよ.

	カードA	カードB	カードC	カードD	カードE
価格 y	541	550	667	469	613
在庫数 x	51	50	37	59	X_5

(2-1) この標本の価格の平均を求めよ.

(2-2) この標本の価格の標本分散を求めよ.

(2-3) この標本の価格の不偏分散を求めよ.

(2-4) カード E の在庫数 X_5 を求めよ.

(2-5) この標本の在庫数を x，価格を y とした場合の標本回帰直線を $y = \beta_0 + \beta_1 x$ とした場合，β_0 と β_1 を求めよ.

(大阪大 2025)　　(m20253504)

16.16 プレーヤー A とプレーヤー B が，あるゲームを行う．ゲームでは対戦を複数回行う．1 回の対戦では必ず勝負がつくものとする．各対戦では勝者が 1 ポイントを獲得し，4 ポイントを先取した方を最終的なゲームの勝者とする．ただし，両プレイヤーが 3 ポイントを獲得して同点になった場合は，さらに 2 ポイントを先取した方，すなわち先に 5 ポイントに到達した方を最終的なゲームの勝者とする.

1 回の対戦で，A が勝つ確率を α $(0 < \alpha < 1)$，B が勝つ確率を $1 - \alpha$ とする．以下の設問に答えよ.

(1) $\alpha = \dfrac{3}{4}$ とする．A が B に 1 ポイントも与えずに最終的なゲームの勝者となる確率を求めよ.

(2) B の獲得したポイントが 3 ポイント未満で，A が 4 ポイントを先取して最終的なゲームの勝者となる確率を α を用いて表せ.

(3) A が最終的なゲームの勝者となる確率を α を用いて表せ.

(大阪大 2025)　　(m20253507)

16.17 確率変数 X と Y は独立であり，それぞれの確率分布は表の通りである.

このとき，以下の問いに答えよ.

X の値	1	2	3
確　率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y の値	1	2
確　率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

(1) X の期待値 (平均) と分散を求めよ.

(2) $X + Y = 3$ となる確率を求めよ.

(3) $(X + Y)^2$ の期待値 (平均) を求めよ.

(山口大 2025)　　(m20254304)

16.18 1から N までの N 個の正の整数を K 個の部分集合に分けることを考える．K 個の部分集合からなる集合を分割と呼ぶ．ただし，どの部分集合も空集合であってはならない.

例えば，$N = 3$, $K = 2$ の場合の分割は以下の 3 個である.

$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{3, 1\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$.

以下の問いに答えよ.

(1) $N=5,\ K=2$ の場合の分割の個数を数えよ.

(2) $N=5,\ K=3$ の場合の分割の個数を数えよ.

(3) $N=5,\ K=2$ の場合において，各分割は等確率で発生すると仮定する．このとき，2 つの正数 1 と 2 が同じ部分集合に入る確率を求めよ.

(4) $N=5,\ K=2$ の場合において，各分割は等確率で発生する仮定の下，2 つの分割 A と B を独立に作ったとする．このとき，分割 A と B のそれぞれにおいて，同時に正数 1 と 2 が同じ部分集合に属している確率を求めよ.

(九州大 2025)　　(m20254701)

16.19 ある部品を A 社と B 社から次の割合で買い付ける.

A 社：60%　　B 社：40%

A 社と B 社から納品された部品に含まれる不良品の割合は，それぞれ

A 社：0.5%　　B 社：0.4%

である．A 社と B 社から納品されたすべての部品の中から 1 つの部品を無作為に選ぶとする．このとき，次の各問に答えよ．なお，答えは分数と小数のどちらで表してもよい.

(1) 選ばれた部品が A 社から納品された不良品である確率を求めよ.

(2) 選ばれた部品が不良品である確率を求めよ.

(3) 選ばれた部品が不良品であることがわかったとする．このとき，この不良品が A 社から納品された部品である確率を求めよ.

(宮崎大 2025)　　(m20255302)

16.20 以下の表は，ある授業の受講生 A，B，C のレポート課題 1 の評価点 X_1 と課題 2 の評価点 X_2 をまとめたものである.

	受講生 A	受講生 B	受講生 C
課題 1 (X_1)	4	3	5
課題 2 (X_2)	2	3	4
合計 (X_1+X_2)	6	6	9

(1) X_1+X_2 の期待値 $E[X_1+X_2]$ を求めよ.

(2) X_1+X_2 の標本分散 $V[X_1+X_2]$ を求めよ.

(3) X_1+X_2 の標本共分散 $Cov[X_1+X_2]$ を求めよ.

(東京都立大 2025)　　(m20255902)

16.21 確率変数 X と Y が共にパラメータ λ（正の実数）の指数分布に従うとする．すなわち，ある事象 A が発生する確率を $Pr\{\mathrm{A}\}$ とするとき，非負の実数 $t(0 \le t < \infty)$ を用いて

$$Pr\{X \le t\} = Pr\{Y \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

である.

(1) X の期待値 $E[X]$ を求めよ.

(2) $X+Y$ の累積分布関数 $F(t) = Pr\{X+Y \le t\}$ を求めよ.

(東京都立大 2025)　　(m20255903)