第１章　微分積分Ｉ《§1　微分》

$\boxed{10}$ 次の関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ，

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leqq 0 \\ x\cos x & x > 0 \end{cases}$$

(1)　関数 $f(x)$ は $x = 0$ で連続か.

(2)　関数 $f(x)$ は微分可能か．可能ならば導関数を記しなさい.

(3)　関数 $f(x)$ は $x = 0$ で，何回まで微分可能か.

(お茶の水女子大)

《　ポイント：$f(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示すには，　》

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ が存在し，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ となることを示す.

$x \leqq 0$ と $x > 0$ で $f(x)$ の定義域が異なるから，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めるには，

左極限と右極限に分ける必要がある．微分可能の議論も同様である.

(解)

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \sin x = 0, \qquad \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} x\cos x = 0$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

一方，$f(0) = \sin 0 = 0$　であるから，

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$　が成り立つ.

ゆえに，$f(x)$ は $x = 0$ で連続である.　〃

(2)　$f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であるかどうか調べる.

$$\lim_{h\to -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{(0+h)\cos(0+h) - 0\cos 0}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{h\cos h}{h} = \lim_{h\to +0} \cos h = 1$$

$$\therefore f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$$

よって，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である.

$x < 0$ のとき，$f(x) = \sin x$ であるから，$f'(x) = \cos x$

$x > 0$ のとき，$f(x) = x\cos x$ であるから，$f'(x) = 1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x) = \cos x - x\sin x$

また，$f'(0) = 1 = \cos 0$ と表されるから，$x = 0$ のとき，$f'(x) = \cos x$ を満たす.

以上より，$f(x)$ は微分可能で，導関数は，

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x \leqq 0 \\ \cos x - x\sin x & x > 0 \end{cases} \qquad 〃$$

(3) まず，$f'(x)$ が $x=0$ で微分可能かどうか調べる．

$$\lim_{h\to -0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{\cos h-\cos 0}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{\cos h-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to -0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}=\lim_{h\to -0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}=\lim_{h\to -0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to -0}\frac{-\sin h}{\cos h+1}=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{(\cos h-h\sin h)-(\cos 0-0\cdot\sin 0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{\cos h-h\sin h-1}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{\cos h-1}{h}-\lim_{h\to +0}\sin h=0-0=0$$

よって，$f''(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=0$ が成り立つから，

$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能である．

$x<0$ のとき，$f'(x)=\cos x$ だから，$f''(x)=-\sin x$

$x>0$ のとき，$f'(x)=\cos x-x\sin x$ だから，

$f''(x)=-\sin x-(1\cdot\sin x+x\cdot\cos x)=-2\sin x-x\cos x$

また，$f''(0)=0=-\sin 0$ と表されるから，$x=0$ のとき，$f''(x)=-\sin x$ を満たす．

以上から，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能で，第 2 次導関数は，

$$f''(x)=\begin{cases}-\sin x & x\leqq 0\\ -2\sin x-x\cos x & x>0\end{cases}$$

次に，$f''(x)$ が $x=0$ で微分可能かどうか調べる．

$$\lim_{h\to -0}\frac{f''(0+h)-f''(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{(-\sin h)-(-\sin 0)}{h}=-\lim_{h\to -0}\frac{\sin h}{h}=-1$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f''(0+h)-f''(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{(-2\sin h-h\cos h)-(-2\sin 0-0\cdot\cos 0)}{h}$$

$$=-2\lim_{h\to +0}\frac{\sin h}{h}-\lim_{h\to +0}\cos h=-2\cdot 1-1=-3$$

したがって，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(0+h)-f''(0)}{h}$ は存在しないから，

$f''(x)$ は $x=0$ で微分可能ではない．

よって，$f(x)$ は $x=0$ で 2 回まで微分可能である．　〃