第２章　微分積分 II《§4　微分方程式》

$\boxed{134(2)}$ 次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x + 2y = e^t \\ 3x + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 1 \end{cases}$$

(埼玉大)

《　ポイント：連立微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = f(x, y, t)$, $\dfrac{dy}{dt} = g(x, y, t)$ は,

x, $\dfrac{dx}{dt}$ または y, $\dfrac{dy}{dt}$ を消去して，2 階微分方程式をつくる．　》

(解) 《　ポイント：x, $\dfrac{dx}{dt}$ を消去する．　》

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x + 2y = e^t \ \cdots ① \\ 3x + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 1 \quad \cdots ② \end{cases}$$

② より,

$$x = -\frac{1}{3}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} \ \cdots ③$$

t で微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$$

これと ③ を ① に代入すると,

$$-\frac{1}{3}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{3}\frac{dy}{dt} - \left(-\frac{1}{3}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\right) + 2y = e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = -3e^t - 1 \ \cdots ④$$

この斉次方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} - 4y = 0 \ \cdots ⑤$

の特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ を解くと,

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0 \qquad \therefore \lambda = -1,\ \lambda = 4$$

よって，⑤ の一般解は,

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

④ の 1 つの解を $y = Ae^t + B \ \cdots ⑥$ と予想すると,

$$\frac{dy}{dt} = Ae^t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Ae^t$$

これらを ④ に代入して,

$$Ae^t - 3Ae^t - 4y = -3e^t - 1 \qquad \therefore 4y = (-2A+3)e^t + 1$$

$$\therefore y = \frac{-2A+3}{4}e^t + \frac{1}{4}$$

これと ⑥ を比べて,

$$\therefore A = \frac{-2A+3}{4}, \quad B = \frac{1}{4} \qquad \therefore A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{4}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}$$

よって，④ の一般解は,

$$y = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4} + C_1e^{-t} + C_2e^{4t} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}e^t - C_1e^{-t} + 4C_2e^{4t}$$

これらを ③ に代入すると,

$$x = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}e^t - C_1e^{-t} + 4C_2e^{4t}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4} + C_1e^{-t} + C_2e^{4t}\right) + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{3}C_1e^{-t} - \frac{4}{3}C_2e^{4t} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}C_1e^{-t} + \frac{2}{3}C_2e^{4t} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2} + C_1e^{-t} - \frac{2}{3}C_2e^{4t}$$

よって，求める一般解は,

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{6}e^t + \dfrac{1}{2} + C_1e^{-t} - \dfrac{2}{3}C_2e^{4t} \\ y = \dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{1}{4} + C_1e^{-t} + C_2e^{4t} \end{cases} \qquad (\ C_1,\ C_2\ \text{は任意定数}\ ) \ /\!/$$

(別解) 《　ポイント：$y,\ \dfrac{dy}{dt}$ を消去する.　》

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x + 2y = e^t \ \cdots ① \\ 3x + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 1 \quad \cdots ② \end{cases}$$

① より,

$$y = -\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^t \ \cdots ③$$

t で微分すると,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}e^t$$

これと ③ を ② に代入すると，

$$3x+\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{2}e^t\right)-2\left(-\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}e^t\right)=1$$

$$3x-\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{2}e^t+\frac{dx}{dt}-x-e^t=1 \qquad \therefore -\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{dx}{dt}+2x=\frac{1}{2}e^t+1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}-4x=-e^t-2 \ \cdots ④$$

この斉次方程式 $\therefore \dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}-4x=0 \ \cdots ⑤$

の特性方程式 $\lambda^2-3\lambda-4=0$ を解くと， $(\lambda+1)(\lambda-4)=0 \quad \therefore \lambda=-1,\ \lambda=4$

よって，⑤ の一般解は，

$x=C_1e^{-t}+C_2e^{4t} \quad (C_1,\ C_2$は任意定数)

④ の 1 つの解を $x=Ae^t+B \ \cdots ⑥$ と予想すると，

$$\frac{dx}{dt}=Ae^t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=Ae^t$$

これらを ④ に代入して，

$$Ae^t-3Ae^t-4x=-e^t-2 \quad \therefore 4x=(-2A+1)e^t+2 \quad \therefore x=\frac{-2A+1}{4}e^t+\frac{1}{2}$$

これと ⑥ を比べて，

$$\therefore A=\frac{-2A+1}{4}, \quad B=\frac{1}{2} \qquad \therefore A=\frac{1}{6}, \quad B=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{6}e^t+\frac{1}{2}$$

よって，④ の一般解は，

$x=\dfrac{1}{6}e^t+\dfrac{1}{2}+C_1e^{-t}+C_2e^{4t} \quad (C_1,\ C_2$は任意定数)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{6}e^t-C_1e^{-t}+4C_2e^{4t}$$

これらを ③ に代入すると，

$$y=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}e^t-C_1e^{-t}+4C_2e^{4t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}e^t+\frac{1}{2}+C_1e^{-t}+C_2e^{4t}\right)+\frac{1}{2}e^t$$

$$=-\frac{1}{12}e^t+\frac{1}{2}C_1e^{-t}-2C_2e^{4t}+\frac{1}{12}e^t+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}C_1e^{-t}+\frac{1}{2}C_2e^{4t}+\frac{1}{2}e^t$$

$$=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{4}+C_1e^{-t}-\frac{3}{2}C_2e^{4t}$$

よって，求める一般解は，

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{6}e^t+\dfrac{1}{2}+C_1e^{-t}+C_2e^{4t} \\ y=\dfrac{1}{2}e^t+\dfrac{1}{4}+C_1e^{-t}-\dfrac{3}{2}C_2e^{4t} \end{cases} \qquad (\ C_1,\ C_2 \text{ は任意定数 })\ _{/\!/}$$