第２章　微分積分 II《§4　微分方程式》

$\boxed{137}$ 2 階の同次線形微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0 \quad (a, b \text{ は定数係数})$$

について，以下の問に答えよ．ただし，$x>0$ とする．

(1)　変数 x を $x=e^t$ と変換する．このとき，$\dfrac{dy}{dt}$ を x と $\dfrac{dy}{dx}$ を用いて表せ．

(2)　さらに，$\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を x, $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を用いて表せ．

(3)　(1) と (2) を用いて，上記の微分方程式が，変数 x を $x=e^t$ と変形することにより，定数係数同次線形微分方程式になることを示せ．

(4)　(3) を参考にして，微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ の一般解を求めよ．

(香川大)

《　ポイント：オイラーの微分方程式の解法　》

オイラーの微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+ax\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$　(a, b は定数) は，

$x=e^t$ または $t=\log|x|$ とおくことで，定数係数同次線形微分方程式に直せる．

[参考]　(解) の (1) から (4) の流れがオイラーの微分方程式の解法になる．

(解)

(1)　$x=e^t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=e^t=x$ であるから，　合成関数の微分法を利用して，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dx} \quad 〃$$

(2)　(1) より，

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt}=\left(1\cdot\frac{dy}{dx}+x\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)x=x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2} \quad 〃$$

(3)　(1) と (2) より，

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-x\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}, \quad \text{また,}\quad x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

これらを与えられた微分方程式に代入して，

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+a\frac{dy}{dt}+by=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=0 \quad 〃$$

《　ポイント：定数係数斉次線形微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$　(a, b は定数) の一般解　》

特定方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解に対応して，次の式で与えられる．

ただし，C_1，C_2 は任意定数とする．

(i)　異なる 2 つの実数解 α，β をもつとき，$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$

(ii)　2 重解 α をもつとき，$y = (C_1 + C_2 x)e^{\alpha x}$

(iii)　異なる 2 つの虚数解 $p + qi$　(p, q は実数) をもつとき，$y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$

(4)　$x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

これと与えられた微分方程式の係数を比べて，$a = 3$，$b = 1$

よって，$x = e^t$ とおくと，(3) より，

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0$$

この特定方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ を解くと，

$(\lambda + 1)^2 = 0$　　$\therefore \lambda = -1$　(重解)

したがって，一般解は，

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{-t} = \frac{C_1 + C_2 t}{e^t}$$

ここで，$x = e^t$，すなわち，$t = \log x$ より，

求める一般解は，

$$y = \frac{c_1 + C_2 \log x}{x} \qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数}) \quad〃$$