第２章　微分積分 II《§4　微分方程式》

$\boxed{139}$ 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$yy'' + \left(y'\right)^2 - 5y' = 0$$

(東京大)

《　ポイント：x を含まない２階非線形微分方程式について　》

$p = \dfrac{dy}{dx}$ おくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$

であるから，p, y についての１階微分方程式に変形することができる．

(解)

$\dfrac{dy}{dx} = p$ おくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot p$　　これらを与えられた微分方程式

$y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 5\dfrac{dy}{dx} = 0$ に代入すると，　　$y\cdot\dfrac{dp}{dy}\cdot p + p^2 - 5p = 0$

$\therefore p\left(y\cdot\dfrac{dp}{dy} + p - 5\right) = 0$

(i) $p = 0$ のとき，$\dfrac{dy}{dx} = 0$　$\therefore y = c$　（ c は任意定数 ）　となり，与えられた微分方程式を満たす．

しかし，２階微分方程式で１個の任意定数しか含まないので，これは一般解ではない．

(ii) $y\cdot\dfrac{dp}{dy} + p - 5 = 0$ のとき，

$y\cdot\dfrac{dp}{dy} = -(p-5)$ より，　$\dfrac{1}{p-5}dp = -\dfrac{1}{y}dy$

$\displaystyle\int\frac{1}{p-5}dp = -\int\frac{1}{y}dy$

よって，$\log|p-5| = -\log|y| + c$　（ c は任意定数 ）

$\log|p-5| + \log|y| = c$　　$\log|y(p-5)| = c$　　$|y(p-5)| = e^c$　　$y(p-5) = \pm e^c$

ここで，$\pm e^c = C$ とおくと，　$y(p-5) = C$　　$p - 5 = \dfrac{C}{y}$

よって，　　$p = \dfrac{C}{y} + 5$　（ C は任意定数 ）

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C}{y} + 5 = \dfrac{C+5y}{y} = 5\left(\dfrac{\frac{C}{5}+y}{y}\right)$

ここで，$\dfrac{C}{5} = C_1$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx} = 5\left(\dfrac{y+C_1}{y}\right)$　　$\therefore \dfrac{y}{y+C_1}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 5$　（ C_1 は任意定数 ）

$\dfrac{y}{y+C_1} = \dfrac{y+C_1-C_1}{y+C_1} = 1 - \dfrac{C_1}{y+C_1}$ より，　$\left(1 - \dfrac{c_1}{y+C_1}\right)dy = 5dx$ と変形できる．

$\therefore \displaystyle\int\left(1 - \frac{c_1}{y+C_1}\right)dy = \int 5dx$

よって，求める一般解は，

$$y - C_1\log|y+C_1| = 5x + C_2 \quad （ C_1,\ C_2 \text{ は任意定数 }） \quad /\!/$$

《　ポイント：$\dfrac{d}{dx}(yy') = (y')^2 + yy''$ であることを利用する．　》

(別解)

$\dfrac{d}{dx}(yy') = \dfrac{dy}{dx} \cdot y' + y \cdot \dfrac{d}{dx}y' = (y')^2 + yy''$

与えられた微分方程式 $yy'' + (y')^2 - 5y' = 0$ より，

$(y')^2 + yy'' = 5y'$

よって，$\dfrac{d}{dx}(yy') = 5y'$　と変形できる．

$\therefore \dfrac{d}{dx}(yy') = \dfrac{d}{dx}(5y)$

両辺を x で積分すると，

$yy' = 5y + C$　（ C は任意定数 ）

ここで，$C = 5C_1$ とおくと，

$y\dfrac{dy}{dx} = 5(y + C_1)$　（ C_1 は任意定数 ）

$\dfrac{y}{y + C_1}\dfrac{dy}{dx} = 5$

ここで，　$\dfrac{y}{y + C_1} = \dfrac{y + C_1 - C_1}{y + C_1} = 1 - \dfrac{C_1}{y + C_1}$　だから，

$\left(1 - \dfrac{C_1}{y + C_1}\right)\dfrac{dy}{dx} = 5$　すなわち，　$\left(1 - \dfrac{C_1}{y + C_1}\right)dy = 5dx$　と変形できる:

$\therefore \displaystyle\int \left(1 - \frac{C_1}{y + C_1}\right)dy = \int 5dx$

よって，求める一般解は，

$$y - C_1 \log|y + C_1| = 5x + C_2 \quad （ C_1,\ C_2 \text{ は任意定数 }） \quad 〃$$