第２章　微分積分 II《§4　微分方程式》

140 微分方程式 $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{1+x^2}$ の解 $y = y(x)$ のうちで，条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = \dfrac{1}{2}$ を満たすものを求めなさい．

(東京農工大)

《　ポイント：定数変化法を用いて解く．　》

(解)

与えられた微分方程式の右辺を 0 とした斉次微分方程式は,

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

この特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ を解いて，$(\lambda+2)^2 = 0 \quad \therefore \lambda = -2$ (重解)

よって，斉次微分方程式の一般解は,

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

定数変化法を用いて，$y = \Big(C_1(x) + C_2(x)x\Big)e^{-2x}$ とおくと,

$$y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x}$$

$$y' = C_1'(x)e^{-2x} + C_1(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_2'(x)xe^{-2x} + C_2(x)\Big\{1 \cdot e^{-2x} + x\Big(-2e^{-2x}\Big)\Big\}$$

$$= C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} + C_1(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_2(x)(1-2x)e^{-2x}$$

ここで,

$$C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} = 0 \cdots\cdots ①$$

とおくと,

$$y' = C_1(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_2(x)(1-2x)e^{-2x}$$

$$y'' = C_1'(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_1(x)\Big(4e^{-2x}\Big) + C_2'(x)(1-2x)e^{-2x} + C_2(x)\Big\{-2e^{-2x} - 2(1-2x)e^{-2x}\Big\}$$

$$= C_1'(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_2'(x)(1-2x)e^{-2x} + C_1(x)\Big(4e^{-2x}\Big) + C_2(x)(-4+4x)e^{-2x}$$

$$= C_1'(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_2'(x)(1-2x)e^{-2x}$$
$$\quad -4\Big\{C_1(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_2(x)(1-2x)e^{-2x}\Big\} - 4\Big\{C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x}\Big\}$$

$$= C_1'(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_2'(x)(1-2x)e^{-2x} - 4y' - 4y$$

$$\therefore y'' + 4y' + 4y = C_1'(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_2'(x)(1-2x)e^{-2x}$$

この左辺は与えられた微分方程式の左辺と同じだから，したがって,

$$C_1'(x)\Big(-2e^{-2x}\Big) + C_2'(x)(1-2x)e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{1+x^2} \cdots\cdots ②$$

よって，①，② から，

$$\begin{pmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{-2x}}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

ここで，$P = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{pmatrix}$ とおくと，

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix} = (1-2x)-(-2x) = 1 \neq 0$$

$$\therefore P^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2x & -x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x & -x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{1+x^2} \\ \dfrac{1}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

よって，$C_1'(x) = -\dfrac{x}{1+x^2} \qquad C_2'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ より，

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + A \quad (A \text{ は任意定数})$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + B \quad (B \text{ は任意定数})$$

よって，$y = (C_1(x) + C_2(x)x)e^{-2x} = \left\{-\dfrac{1}{2}\log(1+x^2) + A + \left(\tan^{-1} + B\right)x\right\}e^{-2x}$

$$\therefore y = \left\{-\frac{1}{2}\log(1+x^2) + x\tan^{-1} + A + Bx\right\}e^{-2x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

$$y' = C_1(x)\left(-2e^{-2x}\right) + C_2(x)(1-2x)e^{-2x}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\log(1+x^2) + A\right)\left(-2e^{-2x}\right) + \left(\tan^{-1}x + B\right)(1-2x)e^{-2x}$$

$$\therefore y' = \left\{\log(1+x^2) - 2A + (1-2x)\tan^{-1}x + B(1-2x)\right\}e^{-2x} \quad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{2}$ より，

$$\begin{cases} A = 0 \\ -2A + B = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \therefore A = 0,\ B = \frac{1}{2}$$

よって，求める特殊解は，

$$y = \left\{-\frac{1}{2}\log(1+x^2) + x\tan^{-1}x + \frac{1}{2}x\right\}e^{-2x} \quad〃$$