第３章　線形代数《§1　ベクトル》

$\boxed{143}$ xyz 空間に 2 点 $A(5,3,4)$, $B(1,-1,2)$ を直径の両端とする球 S と点 $C(-1,-3,1)$ がある．
次の問に答えよ．

(1)　球の方程式を求めなさい．

(2)　2 点 A, B を通る直線に垂直で，球 S の中心を通る平面の方程式を求めなさい．

(3)　2 点 A, B を通る直線に平行で，点 C を通る直線 ℓ の方程式を求めなさい．

(4)　直線 ℓ と球 S が交わる点の座標を求めなさい．

(岩手大)

(解)

(1)　《　ポイント：中心と通る点から球の方程式を求める．　》

中心は線分 AB の中点だから，

$$\left(\frac{5+1}{2},\ \frac{3+(-1)}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$$

よって，球の中心は，$(3,1,3)$ である，

球の半径は $\dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{(1-5)^2 + ((-1)-3)^2(2-4)^2} = 3$

これから，球 S の方程式は，

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9 \quad 〃$$

(2)　《　ポイント：法線ベクトルと通る点から平面の方程式を求める．　》

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,-1,2) - (5,3,4) = (-4,-4,-2) = -2(2,2,1)$ であるから，

法線ベクトルとして，$\overrightarrow{n} = (2,2,1)$ をとることができる．

よって，中心 $(3,1,3)$ を通り，法線ベクトルが，$\overrightarrow{n} = (2,2,1)$ の平面の方程式は，

$$2(x-3) + 2(y-1) + 1(z-3) = 0$$

したがって，直線 AB に垂直で，球 S の中心を通る平面の方程式は，

$$2x + 2y + z = 11 \quad 〃$$

(3)　《　ポイント：方向ベクトルと通る点から直線の方程式を求める．　》

直線 AB に平行なベクトルは $\overrightarrow{AB}$ だから，

点 $C(-1,-3,1)$ を通り，方向ベクトルが $\overrightarrow{v} = (2,2,1)$ の直線の方程式を求めると，

$$\frac{x-(-1)}{2} = \frac{y-(-3)}{2} = \frac{z-1}{1}$$

よって，直線 AB に平行で，点 $C(-1,-3,1)$ を通る直線の方程式は，

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{2} = z-1 \quad 〃$$

(4) 《　ポイント：2 つの図形の共有点は方程式を連立して求める．直線は媒介表示を用いる．　》

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{2} = z-1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = 9 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

① において，$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{2} = z-1 = t$ とおくと，

$x = 2t-1,\ y = 2t-3,\ z = t+1 \cdots\cdots$ ③

これを ② に代入して,;

$(2t-1-3)^2+(2t-3-1)^2+(t+1-3)^2 = 9$,　　$\therefore\ (2t-4)^2+(2t-4)^2+(t-2)^2 = 9$

$4t^2-16t+16+4t^2-16t+16+t^2-4t+4 = 9$,　　$\therefore\ 9t^2-36t+27 = 0$

$t^2-4t+3 = 0,\qquad (t-1)(t-3) = 0,\qquad \therefore t = 1,\ t = 3$

$t = 1$ を ③ に代入して，

$x = 2\cdot1-1 = 1,\quad y = 2\cdot1-3 = -1,\quad z = 1+1 = 2$

$t = 3$ を ③ に代入して，

$x = 2\cdot3-1 = 5,\quad y = 2\cdot3-3 = 3,\quad z = 3+1 = 4$

よって，直線 ℓ と球 S の交点は，

$(1,-1,2),\ (5,3,4)$　〃

である．