第３章　線形代数《§1　ベクトル》

$\boxed{150}$ ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,-1,1),\ \boldsymbol{b}=(2,1,-1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交することを示しなさい．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含み原点を通る平面上にある点 (x,y,z) を，媒介変数 s と t を用いた式で表しなさい．

(3) ベクトル $\boldsymbol{p}=(3,1,2)$ が (2) の平面に投ずる正射影を $\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ と書くとき，係数 α と β を求めなさい．

(秋田大)

(解)

(1) 《　ポイント：$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ だから，　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が 0 ベクトルでないとき，

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交　$\iff$　$\cos\theta=0$　$\iff$　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　》

$\boldsymbol{a}=(1,-1,1),\ \boldsymbol{b}=(2,1,-1)$ より，$\boldsymbol{a}\neq 0$，$\boldsymbol{b}\neq 0$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times 2+(-1)\times 1+1\times(-1)=0$　　　$\therefore \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

したがって，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する　〃

(2) 《　ポイント：$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含み原点を通る平面上の点は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表される．　》

$\boldsymbol{u}=(x,y,z)$ とおくと，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表されるから，$\boldsymbol{u}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$　　$(s,t$ は実数$)$

$\therefore \boldsymbol{u}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=s(1,\ -1,\ 1)+t(2,\ 1,\ -1)=(s,\ -s,\ s)+(2t,\ t,\ -t)=(s+2t,\ -s+t,\ s-t)$

$\therefore (x,\ y,\ z)=(s+2t,\ -s+t,\ s-t)$　　$(s,t$ は実数$)$　〃

(3) 《　ポイント：$\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含み原点を通る平面に垂直　$\iff$　$(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\perp\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\perp\boldsymbol{b}$　》

$\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}$　また，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ だから，

$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$ より，

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})=\boldsymbol{a}\cdot(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p})$

$=\alpha|\boldsymbol{a}|^2+\beta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=\alpha|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=0$

$$\therefore \alpha=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{a}|^2}=\frac{1\times 3+(-1)\times 1+1\times 2}{\left(\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\right)^2}=\frac{4}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\quad〃$$

$\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$ より，

$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})=\boldsymbol{b}\cdot(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p})$

$=\alpha\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\beta|\boldsymbol{b}|^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}=\beta|\boldsymbol{b}|^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}=0$

$$\therefore \beta=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{2\times 3+1\times 1+(-1)\times 2}{\left(\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\right)^2}=\frac{5}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{5}{6}\quad〃$$