第３章　線形代数《§2　行列と行列式》

$\boxed{169}$ 複素数 x に関する次の方程式を解け．

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix} = 0$$

(はこだて未来大)

(解)　《　ポイント：各行（または各列）の和が等しい場合は，全部たすと共通因数が出る．　》

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{ 行}+(2\text{ 行}+3\text{ 行}+4\text{ 行})} = \begin{vmatrix} x^2+4 & x^2+4 & x^2+4 & x^2+4 \\ 1 & x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{ 行より共通因数は }x^2+4} = (x^2+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-1),\ 3\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-1),\ 4\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-1)} = (x^2+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{ 列に着目して}} = (x^2+4)\begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行列の計算をして}} = (x^2+4)(x^2)^3 = x^6(x^2+4)$$

よって，与えられた方程式は次のように表せる．

$$x^6(x^2+4)=0$$

これを解くと，

$$\therefore x=0\ ,\quad x=\pm 2i \quad /\!/$$

(別解)

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x^2+1)\begin{vmatrix} x^2+1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & x^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x^2+1)\left\{\Big((x^2+1)^3+2\Big) - 3(x^2+1)\right\} - \left\{\Big((x^2+1)^2+2\Big) - \Big(2(x^2+1)+1\Big)\right\}$$

$$+\left\{\Big(2(x^2+1)+1\Big) - \Big((x^2+1)^2+2\Big)\right\} - \left\{\Big((x^2+1)^2+2\Big) - \Big(2(x^2+1)+1\Big)\right\}$$

$$= (x^2+1)^4 + 2(x^2+1) - 3(x^2+1)^2 - (x^2+1)^2 + 2(x^2+1) - 1$$

$$+2(x^2+1) - (x^2+1)^2 - 1 - (x^2+1)^2 + 2(x^2+1) - 1$$

$$= (x^2+1)^4 - 6(x^2+1)^2 + 8(x^2+1) - 3$$

$$= \Big\{(x^2+1)-1\Big\}\Big\{(x^2+1)^3 + (x^2+1)^2 - 5(x^2+1) + 3\Big\}$$

$$= x^2\Big\{(x^2+1)-1\Big\}\Big\{(x^2+1)^2 + 2(x^2+1) - 3\Big\}$$

$$= x^2\cdot x^2\Big\{(x^2+1)-1\Big\}\Big\{(x^2+1)+3\Big\}$$

$$= x^2\cdot x^2\cdot x^2(x^2+4) = \big(x^2\big)^3(x^2+4) = x^6(x^2+4)$$

よって，与えられた方程式は，次のように表せる．

$$x^6(x^2+4) = 0$$

これを解くと，

$$\therefore x = 0\ ,\quad x = \pm 2i \quad〃$$

《　ポイント：$x^2+1=y$ とおくと，因数分解がし易くなる．　》

$$(x^2+1)^4 - 6(x^2+1)^2 + 8(x^2+1) - 3 = = y^4 - 6y^2 + 8y - 3 = (y-1)(y^3+y^2-5y+3)$$

$$= (y-1)(y-1)(y^2+2y-3) = (y-1)(y-1)(y-1)(y+3) = (y-1)^3(y+3)$$

$$= \Big((x^2+1)-1\Big)^3\Big((x^2+1)+3\Big) = \big(x^2\big)^3(x^2+4) = x^6(x^2+4)$$