第３章　線形代数《§2　行列と行列式》

$\boxed{177}$ x, y, z についての連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -2 \\ -2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = a \end{cases}$$

が解をもつように，定数 a を定め，解を求めよ．

(愛媛大)

《　ポイント：連立１次方程式の解が存在するための必要十分条件は　》

[係数行列の階数]=[拡大係数行列の階数]

(解)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}\times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行}\times \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

係数行列の階数は 2 である．

$a \neq 3$ のとき，拡大係数行列の階数は 3 であるから，連立方程式は解をもたない．

$a = 3$ のとき，拡大係数行列の階数は 2 であるから，連立方程式は解をもつ．

このとき，

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -2 \\ -2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = -2 \\ y - z = -1 \end{cases} \quad \text{これから,} \quad \begin{cases} x = z \\ y = z - 1 \end{cases}$$

$z = t$ とおくと，$x = t$,　$y = t - 1$

よって，連立方程式が解をもつ定数 a の値は，　$a = 3$　〃

$a = 3$ のとき，連立方程式の解は，　$x = t$，$y = t - 1$，$z = t$　（t は任意の数）　〃