第３章　線形代数《§３　線形変換》

$\boxed{183}$ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を線形写像とする．$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，

$f(\boldsymbol{u}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるとする．

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ．

(北見工業大)

《　ポイント：列ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を並べてできる行列を $\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}$ のように表すとすると，

$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}$ が成り立つ．　》

(解)

$f(\boldsymbol{u}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より，　$A\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$A\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるから，

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \therefore A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdots\cdots ①$$

ここで，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より，　$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \neq 0$ だから，

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

これを ① の両辺に右から掛けると，

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

[確認]

$$f(\boldsymbol{u}_1) = A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{u}_2) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$