第３章　線形代数《§３　線形変換》

$\boxed{192}$ 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ による一次変換について，以下の問に答えよ,

ここで，一次変換とは下式に示すように，任意の平面上の座標 (x, y) を $(x'.y')$ に移す変換をいう．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1)　$a = 1,\ b = k$（k は任意の実数）のとき，xy 平面全体が xy 平面全体に移される条件と，直線に移される条件を示せ．また，直線に移される場合の直線の式を求めよ．

(2)　直線 $2x + y = 0$ が直線 $6x - 5y = 0$ に移されるとき，a, b の値を求めよ．

(三重大)

《　ポイント　》平面上の線形変換 f が行列 A で表されるとき,

A が正則ならば，f は平面全体を平面全体に移す.

A が正則でないならば，f は平面全体を直線または点に移す.

(解)

(1)　《　ポイント：平面上の一次変換を定義する行列が正則であるとき,

平面全体を平面全体に移すことを利用する．　》

行列 $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ とおく,

条件 $a = 1,\ b = k$（k は任意の実数）より，　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$

(i)　xy 平面全体が xy 平面全体に移される場合,

平面上の任意の点 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に対して，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が存在すればよい,

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k - 6 \neq 0$ のとき，つまり，$k \neq 6$ のとき,

A は逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{k-6} \begin{pmatrix} k & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ をもつ.

よって，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の両辺に左から A^{-1} を掛けると,

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

このとき，xy 平面全体が xy 平面全体に移されることがわかる.

よって，xy 平面全体に移される条件は $k \neq 6$ である．　〃

(ii) $|A| = k - 6 = 0$ のとき，つまり，$k = 6$ のとき，

点 $P(x, y)$ が点 $Q(x', y')$ に移ったとすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{cases} x' = \ x + 3y \\ y' = 2x + 6y \end{cases}$$

x, y を消去すると，$y' = 2x'$

よって，平面全体が直線に移される条件は，　$k = 6$　〃

　　　　直線の式は，$y = 2x$　〃

(2) 《　ポイント：像が原点だけとなる場合に注意する．　》

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと，

直線 $2x + y = 0$ 上の点 $(x, -2x)$ が点 (x', y') に移ったとすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-6)x \\ (2-2b)x \end{pmatrix}$$

よって，直線 $2x + y = 0$ 上の点 $(x, -2x)$ は点 $\Big((a-6)x,\ (2-2b)x\Big)$ に移される．

ここで，$a = 6,\ b = 1$ とすると，

直線 $2x + y = 0$ の像が原点 $(0, 0)$ のみとなるから，条件に合わない．

よって，$a = 6,\ b = 1$ は除く．

このとき，点 $\Big((a-6)x,\ (2-2b)x\Big)$ は直線 $6x - 5y = 0$ 上にあるから，

$6(a-6)x - 5(2-2b)x = 0$　　　$\therefore (6a - 36 - 10 + 10b)x = 0$

　　$\therefore (3a + 5b - 23)x = 0$

よって，任意の x について，この等式が成り立つ条件は，$3a + 5b - 23 = 0$ である．

したがって，求める $a,\ b$ の値は，

　　$3a + 5b - 23 = 0$ を満たす実数 $a,\ b$ ，　ただし，$(a, b) \neq (6, 1)$　〃