第３章　線形代数《§4　固有値とその応用》

$\boxed{199}$ 行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ に対して，$A\overrightarrow{p_i}=\lambda_i\overrightarrow{p_i}$，$|\overrightarrow{p_i}|=1\quad(i=1,2,3),\quad \lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ とする．

ここで，$|\overrightarrow{p}|$ は $\overrightarrow{p}$ の長さとする．次の問いに答えよ．

(1) λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．

(2) $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$ を求めよ．

(3) $\overrightarrow{x}=x_1\overrightarrow{p_1}+x_2\overrightarrow{p_2}+x_3\overrightarrow{p_3}$ とする．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|A^n\overrightarrow{x}|=\infty$ となる x_1, x_2, x_3 の条件を求めよ．

(金沢大)

《　ポイント：固有値と固有ベクトルの定義である $A\overrightarrow{p_i}=\lambda_i\overrightarrow{p_i}$ により，$\overrightarrow{x}$ を固有ベクトルの

1 次結合で表すと，$A^n\overrightarrow{x}$ を簡単に求めることができる．》

(解)

(1) $|A-\lambda E|=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^3-(1-\lambda)=(1-\lambda)\Big\{(1-\lambda)^2-1\Big\}$

$=(1-\lambda)\Big\{(1-\lambda)+1\Big\}\Big\{(1-\lambda)-1\Big\}=(1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

とおくと，A の固有値は $\lambda=0,\ 1,\ 2$ である．

$\therefore \lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$ 〃

(2)

(i) $\lambda_1=0$ のとき，

$$(A-0\cdot E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z\\y\\x+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}x+z=0\\ y=0\end{cases}$$

$x=C_1$ とおくと，$z=-C_1$

$\lambda_1=0$ のときの固有ベクトルは，$\overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix}C_1\\0\\-C_1\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\quad$ (C_1は定数)

$|\overrightarrow{p_1}|=\sqrt{{C_1}^2+{C_1}^2}=\sqrt{2{C_1}^2}=\sqrt{2}|C_1|=1$ より，$\quad|C_1|=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad C_1=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\overrightarrow{p_1}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 〃

(ii) $\lambda_2 = 1$ のとき,

$$(A - 1\cdot E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 0 \\ y = C_2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\lambda_2 = 1$ のときの固有ベクトルは,

$$\overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C_2\text{は定数})$$

$|\overrightarrow{p_2}| = \sqrt{{C_2}^2} = |C_2| = 1$ より, $\quad C_2 = \pm 1$

$$\therefore \overrightarrow{p_2} = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(iii) $\lambda_3 = 2$ のとき,

$$(A - 2\cdot E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z \\ -y \\ x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} -x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$x = C_3$ とおくと, $z = C_3$

$\lambda_3 = 2$ のときの固有ベクトルは,

$$\overrightarrow{p_3} = \begin{pmatrix} C_3 \\ 0 \\ C_3 \end{pmatrix} = C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_3\text{は定数})$$

$|\overrightarrow{p_3}| = \sqrt{{C_3}^2 + {C_3}^2} = \sqrt{2}{C_3}^2 = \sqrt{2}|C_3| = 1$ より, $\quad |C_3| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_3 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \overrightarrow{p_3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(3) (1), (2) の結果の固有値と固有ベクトルの関係より,

$$A\overrightarrow{p_1} = 0 \cdot \overrightarrow{p_1} = 0, \qquad A\overrightarrow{p_2} = 1 \cdot \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_2}, \qquad A\overrightarrow{p_3} = 2 \cdot \overrightarrow{p_3} = 2\overrightarrow{p_3}$$

であるから,

$$A^n\overrightarrow{p_1} = 0, \qquad A^n\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_2}, \qquad A^n\overrightarrow{p_3} = 2^n\overrightarrow{p_3}$$

が成り立つ.

$$A^n\overrightarrow{x} = A^n\left(x_1\overrightarrow{p_1} + x_2\overrightarrow{p_2} + x_3\overrightarrow{p_3}\right)$$

$$= x_1A^n\overrightarrow{p_1} + x_2A^n\overrightarrow{p_2} + x_3A^n\overrightarrow{p_3} = x_1 \cdot 0 + x_2\overrightarrow{p_2} + x_3 \cdot 2^n\overrightarrow{p_3} = x_2\overrightarrow{p_2} + x_3 2^n\overrightarrow{p_3}$$

ここで,

$$\overrightarrow{p_2} = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{p_3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$x_2\overrightarrow{p_2} = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 2^n\overrightarrow{p_3} = \pm\begin{pmatrix} \dfrac{2^n}{\sqrt{2}}x_3 \\ 0 \\ \dfrac{2^n}{\sqrt{2}}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n\overrightarrow{x} = x_2\overrightarrow{p_2} + x_3 2^n\overrightarrow{p_3} = \pm\begin{pmatrix} \dfrac{2^n}{\sqrt{2}}x_3 \\ x_2 \\ \dfrac{2^n}{\sqrt{2}}x_3 \end{pmatrix}, \qquad \pm\begin{pmatrix} \dfrac{2^n}{\sqrt{2}}x_3 \\ -x_2 \\ \dfrac{2^n}{\sqrt{2}}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left|A^n\overrightarrow{x}\right| = \sqrt{\left(\frac{2^n}{\sqrt{2}}x_3\right)^2 + {x_2}^2 + \left(\frac{2^n}{\sqrt{2}}x_3\right)^2}$$

よって,

$$\lim_{n\to\infty}\left|A^n\overrightarrow{x}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{2^n}{\sqrt{2}}x_3\right)^2 + {x_2}^2 + \left(\frac{2^n}{\sqrt{2}}x_3\right)^2} = \infty$$

となる条件は,

$$x_3 \neq 0 \quad /\!/$$