第１章　微分積分Ｉ《§1　微分》

$\boxed{20}$ 関数 $f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ について．以下の問いに答えよ，

(1) n を固定するとき，$f_n(x)$ の閉区間 $[0, 1]$ での最大値を M_n，それを与える x の値を x_n とする．

このとき，M_n と x_n をそれぞれ n で表せ．

(2) (1) の M_n と x_n に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ をそれぞれ求めよ．

(はこだて未来大)

(解)

(1) 《　ポイント：文字が関数に含まれても，普通の数字と同じように扱う　》

$f_n(x) = nx(1-x)^n$

$f_n'(x) = (nx)'(1-x)^n + nx\left\{(1-x)^n\right\}' = n(1-x)^n + nx \cdot n(1-x)^{n-1} \cdot (-1)$

$\quad = n(1-x)^{n-1}\left\{(1-x) - nx\right\} = n(1-x)^{n-1}\left\{1-(n+1)x\right\}$

$f_n'(x) = 0$ とおくと，$n(1-x)^{n-1}\left\{1-(n+1)x\right\} = 0$

ここで，$n > 0$ より，

$x = 1\,,\quad x = \dfrac{1}{n+1} \qquad \left(\dfrac{1}{n+1} < 1\right)$

よって，閉区間 $[0, 1]$ での増減表は次のようになる．

x	0	$\dots$	$\frac{1}{n+1}$	$\dots$	1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$x = \dfrac{1}{n+1}$ のとき，最大となり，最大値は

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$\therefore M_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ 〃　　　$\therefore x_n = \dfrac{1}{n+1}$ 〃

(2) 《　ポイント：公式 $\displaystyle\lim_{n\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ を用いるように式を変形する．　》

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right)^{-(n+1)}\right\}^{-1}$$

$$= \lim_{\left(-\frac{1}{n+1}\right)\to 0}\left\{\left(1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right)^{-(n+1)}\right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad〃$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \quad〃$$