第３章　線形代数《§4　固有値とその応用》

$\boxed{201}$ (1)　次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)　$P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を 1 つ求めよ

(3)　数列 $\left\{a_n\right\}$ を $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 1,$

$a_{n+3} = a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n \quad (n \geqq 1)$　と定義する.

このとき, $\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ を満たす 3 次正方行列 B を求めよ.

(4)　一般項 a_n を求めよ.

(岐阜大)

《　ポイント：行列を利用して, 4 項間漸化式の一般項を求める.　》

固有値と固有ベクトルは通常の求め方でも勿論求められるが, 次のポイントの方法を用いると,

A^n を比較的簡単に求めることができる.

《　ポイント：ケーリー・ハミルトンの定理　》

$n \times n$ 行列 A に対して, $f_A(x) = |A - xE|$ とすると, $f_A(A) = 0$ が成り立つ.

[固有方程式 $f_A(x) = 0$ が 3 次のとき]

固有方程式の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$（すべて異なる）とすると, $f_A(x) = -(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

ケーリー・ハミルトンの定理から, $(A-\alpha E)(A-\beta E)(A-\gamma E) = 0$ が成り立つ.

$$I = \frac{(A-\beta E)(A-\gamma E)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\ ,\quad J = \frac{(A-\gamma E)(A-\alpha E)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}\ ,\quad K = \frac{(A-\alpha E)(A-\beta E)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

とおくと, 次の式が成り立つ.

(1)　$I + J + K = E$　　　(2)　$IJ = JI = JK = KJ = IK = KI$

(3)　$I^2 = I,\ J^2 = J,\ K^2 = K$　　　(4)　$A = \alpha I + \beta J + \gamma K$

このことから, $A^n = \alpha^n I + \beta^n J + \gamma^n K$ が成り立つ.

(解)

(1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -4 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)-4+4\lambda$

$= -\lambda^2(\lambda-1)-4(\lambda-1) = -(\lambda-1)(\lambda^2-4) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$

とおくと，　$\lambda = 1,\ 2,\ -2$

よって，A の固有値は，$\lambda = -2,\ 1,\ 2$　〃

$\alpha = -2,\ \beta = 1,\ \gamma = 2$ とおくと，

ケーリー・ハミルトンの定理より，$(A+2E)(A-E)(A-2E) = 0$

$$I = \frac{(A-E)(A-2E)}{(-2-1)(-2-2)} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -12 & 8 \\ -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと，　$(A+2E)I = \dfrac{(A+2E)(A-E)(A-2E)}{12} = 0$ より，

$AI = -2I$ が成り立ち，I の列ベクトルが固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルである．

同様にして，

$$J = \frac{(A-2E)(A+2E)}{(1-2)(1-(-2))} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

とおくと，　$(A-E)J = \dfrac{(A-E)(A-2E)(A+2E)}{3} = 0$ より，

$AI = I$ が成り立ち，J の零ベクトル以外の列ベクトルが固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルである．

$$K = \frac{(A+2E)(A-E)}{(2-(-2))(2-1)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とおくと，　$(A-2E)K = \dfrac{(A-2E)(A+2E)(A-E)}{4} = 0$ より，

$AK = 2K$ が成り立ち，K の列ベクトルが固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルである．

よって，$\lambda = -2,\ 1,\ 2$ に対応する固有ベクトルは，それぞれ

$$C_1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad C_3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad (C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0,\ C_3 \neq 0)$$ 〃

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P の 1 つは，(1) の結果より，

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 〃

(3) $\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2}+4a_{n+1}-4a_n \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ であるから,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 〃 すなわち, $B = A$ 〃

(4) (a) $I+J+K=E$ (b) $IJ=JI=JK=KJ=IK=KI=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $I^2=I,\ J^2=J,\ K^2=K$

$A=AE=A(I+J+K)=AI+AJ+AK=-2I+J+2K \qquad \therefore A=-2I+J+2K$

$A^2=\left(-2I+J+2K\right)\left(-2I+J+2K\right)$

$=(-2)^2I^2+J^2+2^2K^2+2\cdot(-2)IJ+2\cdot 2JK+2\cdot(-4)IK=(-2)^2I+J+2^2K$

同様にして, $A^n=(-2)^nI+J+2^nK$ が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで,

$A^{n-1}=(-2)^{n-1}I+J+2^{n-1}K$

$= \dfrac{(-2)^{n-1}}{12}\begin{pmatrix} 4 & -12 & 8 \\ -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \dfrac{2^{n-1}}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ であるから,

$\therefore \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{(-2)^{n-1}}{12}\begin{pmatrix} 4 & -12 & 8 \\ -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2^{n-1}}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(-2)^{n-1}}{12}\begin{pmatrix} -48 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{2^{n-1}}{4}\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= -(-2)^{n-1}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2^{n-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 行に着目すると, 求める一般項は,

$a_n=-(-2)^{n-1}+1+2^{n-1}$ 〃

(別解)

(1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -4 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - 4 + 4\lambda$

$= -\lambda^2(\lambda-1) - 4(\lambda-1) = -(\lambda-1)(\lambda^2-4) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$

とおくと, $\lambda = 1,\ 2,\ -2$

よって, A の固有値は, $\lambda = -2,\ 1,\ 2$ 〃

(a) $\lambda = -2$ に対する A の固有ベクトルを求める.

$$\Big(A-(-2)\cdot E\Big)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1+4x_2-4x_3 \\ x_1+2x_2 \\ x_2+2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-4x_3 = 0 \\ x_1+2x_2 = 0 \\ x_2+2x_3 = 0 \end{cases}$$

これを解いて, $x_2 = -2x_3,\quad x_1 = -2x_2 = -2(-2x_3) = 4x_3$

$x_3 = C_1$ とおくと, $x_2 = -2C_1,\quad x_1 = 4C_1$

$\lambda = -2$ に対する A の固有ベクトルは,

$$C_1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_1 \neq 0) \quad 〃$$

(b) $\lambda = 1$ に対する A の固有ベクトルを求める.

$$\Big(A-1\cdot E\Big)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_2-4x_3 \\ x_1-x_2 \\ x_2-x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_2-4x_3 = 0 \\ x_1-x_2 = 0 \\ x_2-x_3 = 0 \end{cases}$$

これを解いて, $x_1 = x_2 = x_3$

$x_1 = x_2 = x_3 = C_2$ とおくと,

$\lambda = 1$ に対する A の固有ベクトルは,

$$C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_2 \neq 0) \quad 〃$$

(c) $\lambda = 2$ に対する A の固有ベクトルを求める.

$$\Big(A - 2\cdot E\Big)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 - 4x_3 \\ x_1 - 2x_2 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

これを解いて, $x_2 = 2x_3, \quad x_1 = 2x_2 = 2(2x_3) = 4x_3$

$x_3 = C_3$ とおくと, $x_2 = 2C_3, \quad x_1 = 4C_3$

$\lambda = 2$ に対する A の固有ベクトルは,

$$C_3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_3 \neq 0) \quad /\!/$$

したがって, 行列 A の固有値 $\lambda = -2,\ 1,\ 2$ に対する固有ベクトルは,

$$C_1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_1 =\neq 0,\ C_2 \neq 0,\ C_3 \neq 0) \quad /\!/$$

である.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P の 1 つは, (1) の結果より,

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

(3) $\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ であるから,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

すなわち, $B = A \quad /\!/$

(4)

$$\begin{array}{c} \quad\text{P}\qquad\qquad\text{E} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}\times\frac{1}{4}\quad 2\text{行}+3\text{行}\times 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{行}\times 4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\text{行}\times\left(\frac{1}{3}\right)\quad 3\text{行}\times\left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\text{行}+3\text{行}\times\left(-\frac{4}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times\left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+3\text{行}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -4 & 0 & 16 \\ 6 & 6 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(p^{-1}AP)^2=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)^2&0&0\\0&1^2&0\\0&0&2^2\end{pmatrix}$$

同様にして，

$$(p^{-1}AP)^{n-1}=\begin{pmatrix}(-2)^{n-1}&0&0\\0&1&0\\0&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$A^{n-1}=P\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots\cdots\cdots(P^{-1}AP)}_{(n-1)\text{ 個}}P^{-1}=P(P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}4&1&4\\-2&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^{n-1}&0&0\\0&1&0\\0&0&2^{n-1}\end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1&-3&2\\-4&0&16\\3&3&-6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4\cdot(-2)^{n-1}&1&4\cdot 2^{n-1}\\-2\cdot(-2)^{n-1}&1&2\cdot 2^{n-1}\\(-2)^{n-1}&1&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&2\\-4&0&16\\3&3&-6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4\cdot(-2)^{n-1}-4+12\cdot 2^{n-1}&-12\cdot(-2)^{n-1}+12\cdot 2^{n-1}&8(-2)^{n-1}+16-24\cdot 2^{n-1}\\-2\cdot(-2)^{n-1}-4+6\cdot 2^{n-1}&6\cdot(-2)^{n-1}+6\cdot 2^{n-1}&-4(-2)^{n-1}+16-12\cdot 2^{n-1}\\(-2)^{n-1}-4+3\cdot 2^{n-1}&-3\cdot(-2)^{n-1}+3\cdot 2^{n-1}&2\cdot(-2)^{n-1}+16-6\cdot 2^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\cdot(-2)^{n-1}\begin{pmatrix}4&-12&8\\-2&6&-4\\1&-3&2\end{pmatrix}+\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-4&0&16\\-4&0&16\\-4&0&16\end{pmatrix}+\frac{1}{12}\cdot 2^{n-1}\begin{pmatrix}12&12&-24\\6&6&-12\\3&3&-6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{(-2)^{n-1}}{12}\begin{pmatrix}4&-12&8\\-2&6&-4\\1&-3&2\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&-4\\1&0&-4\\1&0&-4\end{pmatrix}+\frac{2^{n-1}}{4}\begin{pmatrix}4&4&-8\\2&2&-4\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

(3) の結果より，

$$\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\\a_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots=A^{n-1}\begin{pmatrix}a_3\\a_2\\a_1\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{(-2)^{n-1}}{12}\begin{pmatrix}4&-12&8\\-2&6&-4\\1&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&-4\\1&0&-4\\1&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}+\frac{2^{n-1}}{4}\begin{pmatrix}4&4&-8\\2&2&-4\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{(-2)^{n-1}}{12}\begin{pmatrix}-48\\24\\-12\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}+\frac{2^{n-1}}{4}\begin{pmatrix}16\\8\\4\end{pmatrix}=-(-2)^{n-1}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2^{n-1}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$$

3 行に着目すると，求める一般項は，

$$a_n=-(-2)^{n-1}+1+2^{n-1}\quad〃$$