第３章　線形代数《§５　ベクトル空間》

$\boxed{215}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1)　A の階数を求めよ.

(2)　連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^4$ の部分空間（すなわち，解空間）W の次元を求めよ.

(3)　W の基底を求めよ.

(信州大)

《　ポイント：連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間は，行列 A を表現行列とする

線形写像 f の $\mathrm{Ker}\, f$ である．このとき，$\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}\, A$　》

《　ポイント：線形写像 $f : V \to W$ について，次の次元定理が成り立つ.

$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$

$\boxed{\text{つぶれる次元} \ + \ \text{残る次元} \ = \ \text{もとの次元}}$

このうちの 2 つがわかると残りの 1 つがわかる．次元の確認にも使える.　》

(解)

(1)　A の行基本変形すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，A の階数は 2 である,　　$\mathrm{rank}\, A = 2$　〃

(2)　《　ポイント：次元定理を用いると解空間の次元を求めることができる．　》

行列 A で表される線形写像を $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ とすると，$W = \mathrm{Ker}\, f$

(1) より，$\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}\, A = 2$

次元定理　$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^4$　より，

$\therefore \dim W = \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Im}\, f = 4 - 2 = 2$　〃

(3)　$\boldsymbol{x} \in W$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とおくと，(1) より，

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + \ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$\therefore x_1 = -2x_3 - x_4$,　$x_2 = -x_3 - x_4$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　とおくと，

この 2 つのベクトルは線形独立であるから，

W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は，

$\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2$　　(s, t は定数)

と，線形結合で表せる．

よって，W の基底は，

$$\left\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\right\}，\text{すなわち，} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$　〃

(注)，基底の要素の個数が次元だから，(3) から (2) の $\dim W = 2$ はすぐわかる．