第３章　線形代数《§５　ベクトル空間》

$\boxed{222}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; b+c+d=0 \right\} \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} a+b=0 \\ c=2d \end{array} \right\}$$

とする．このとき，W_1, W_2 のそれぞれの次元と一組の基底を求めよ．

また，$W_1 \cap W_2$，$W_1 + W_2$ のそれぞれの次元と一組の基底を求めよ．

(大阪府立大)

《　ポイント：[行列の階数]=[線形独立な列ベクトルの最大個数]
が，任意の行列に対して成り立つ．さらに，その線形独立な列ベクトルは,
行列の階数を求めるために 行基本変形してできる上三角行列の
線形独立な列ベクトルと同じ位置にある列ベクトルである．　》

《　ポイント：$W_1 \cap W_2$ の基底は，連立方程式を解くこてで求めることができる,
$W_1 + W_2$ は W_1 のベクトルと W_2 のベクトルで生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間である,
すなわち，$W_1 + W_2 = \left\{ \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \middle| \boldsymbol{w}_1 \in W_1 \,,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2 \right\}$ であるから,
$W_1 + W_2$ の要素は W_1 と W_2 の基底の線形結合で表される．　》

(解)

(1)　W_1 の次元と基底を求める．

W_1 において，$d = -b - c$ であるから,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -b-c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は線形独立であるから,

$\left\{ \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \right\}$ は W_1 の基底であり，$\dim W_1 = 3$

すなわち，W_1 の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ で，次元は 3 である．　〃

(2) W_2 の次元と基底を求める．

W_2 において，$b=-a,\ c=2d$ であるから，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2d \\ d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ は線形独立であるから，

$\left\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\right\}$ は W_2 の基底であり，$\dim W_2 = 2$

すなわち，W_2 の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ で，次元は 2 である．　〃

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求める．

$$W_1 \cap W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} b+c+d=0 \\ a+b=0 \\ c=2d \end{matrix}\right\}$$ であるから，

連立方程式 $\begin{cases} b+c+d=0 \\ a+b=0 \\ c=2d \end{cases}$ を解くと，$\begin{cases} a=3d \\ b=-3d \\ c=2d \end{cases}$，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3d \\ -3d \\ 2d \\ d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで，$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$\left\{\boldsymbol{w}\right\}$ が W_1 の基底であり，$\dim\left(W_1 \cap W_2\right) = 1$

すなわち，$W_1 \cap W_2$ の基底は $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ で，次元は 1 である．　〃

(4) $W_1 + W_2$ の次元と基底を求める．

$\left\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\right\}$ は W_1 の基底であり，

$\left\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\right\}$ は W_2 の基底であるから，

$W_1 + W_2$ は $\left\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\right\}$ の線形結合によって表される．これらのベクトルを並べてできる行列 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}$ に行基本変形を行って．上三角行列にする．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\text{行}+2\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\text{行}+3\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

上三角形の第 1 列から第 4 列が線形独立であり，第 1 列から第 5 列が線形従属であるから，

同じ位置にある $\left\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_1\right\}$ は線形独立である．

ここで，

$$3\boldsymbol{u}_1 - 3\boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3 - 3\boldsymbol{v}_1 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_2$$

よって，$\boldsymbol{v}_2$ は，$\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{u}_1 - 3\boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3 - 3\boldsymbol{v}_1$ のように線形結合で表せる，

したがって，$\left\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_1\right\}$ が $W_1 + W_2$ の基底であり，$\dim\left(W_1 + W_2\right) = 4$

すなわち，$W_1 + W_2$ の基底は，

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$ であり，次元は 4 である，　〃

(注) 一般に，$\dim\,(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim\,(W_1 \cap W_2)$