第５章　確率統計《§1　確率・確率分布》

259 次の各問いに答えなさい．

(1)　サイコロを 3 回振るとき，1 の目が出る回数を X とする．X の確率分布表を示しなさい．

(2)　確率変数 X が $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ 　（$\lambda>0$, k は 0 以上の整数）

で与えられる確率分布に従うという．次の各問いに答えよ．

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$ を示しなさい．

(b) 確率変数 X の平均が λ であることを示しなさい．

(和歌山大)

《　ポイント１：ポアソン分布　》

確率変数 X のとり得る値が $k=0,1,2,\cdots$ で，各値 k をとる確率が

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\quad(\lambda>0)$$

で表されるとき，X の分布をポアソン分布という．

このとき，X の平均は $E(X)=\lambda$,　X の分散は $V(X)=\lambda$

《　ポイント２：マクローリン級数を利用する　》

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

(解)

(1)　$P(X=0)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^3=\dfrac{125}{216}$,　　$P(X=1)={}_3C_1\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\left(\dfrac{1}{6}\right)=3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{25}{72}$,

$P(X=2)={}_3C_2\left(\dfrac{5}{6}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=3\left(\dfrac{5}{6}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{5}{72}$,　　$P(X=3)={}_3C_3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{1}{216}$,

よって，X の確率分布表は右のようになる．

k	0	1	2	3	計
$P(X=k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$	1

(2)　(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$

$\displaystyle=e^{-\lambda}\left(1+\frac{1}{1!}\lambda+\frac{1}{2!}\lambda^2+\frac{1}{3!}\lambda^3+\cdots+\frac{1}{n!}\lambda^n+\cdots\right)=e^{-\lambda}e^{\lambda}=e^{-\lambda+\lambda}=e^0=1$　〃

(b) 確率変数 X の平均は

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!}$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\left(1+\frac{1}{1!}\lambda+\frac{1}{2!}\lambda^2+\frac{1}{3!}\lambda^3+\cdots+\frac{1}{n!}\lambda^n+\cdots\right)$$

$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}=\lambda\cdot e^{-\lambda+\lambda}=\lambda\cdot e^0=\lambda$　〃

《参考資料》ポアソン分布の分散 $V(X)$ を求めてみよう.

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+E(X)$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\left(1+\frac{1}{1!}\lambda+\frac{1}{2!}\lambda^2+\frac{1}{3!}\lambda^3+\cdots+\frac{1}{k!}\lambda^k+\cdots\right)+\lambda$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$$V(X)=E(X^2)-\left\{E(X)\right\}^2=(\lambda^2+\lambda)-(\lambda)^2=\lambda$$