第１章　微分積分 I《§1　微分》

$\boxed{26}$ xy 平面上に，曲線 $C : y = x^3 + 3y^2 + x$ と点 $A(1, a)$ がある．A を通って，
C に 3 本の接線が引けるとき，a の値の範囲を求めよ．

(三重大)

《　ポイント：3 次関数の場合，一つの直線が 2 点で接することはない．　》

(解)

接点を $P(t, t^3 + 3t^2 + t)$ とすると，

$y' = 3x^2 + 6x + 1$ より，接線の傾きは $\Big(y\Big)_{x=t} = 3t^2 + 6t + 1$ であるから，

接線の方程式は，

$y - (t^3 + 3t^2 + t) = (3t^2 + 6t + 1)(x - t)$

$y = (3t^2 + 6t + 1)x - t(3t^2 + 6t + 1) + (t^3 + 3t^2 + t)$

$\therefore y = (3t^2 + 6t + 1)x - 2t^3 - 3t^2$

これが点 $A(1, a)$ を通るから，

$a = (3t^2 + 6t + 1) \cdot 1 - 2t^3 - 3t^2$

$\therefore a = -2t^3 + 6t + 1$

この方程式の実数解の個数は

$\begin{cases} y = a \\ y = f(x) = -2t^3 + 6t + 1 \end{cases}$　　とおくと，

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数と一致する．

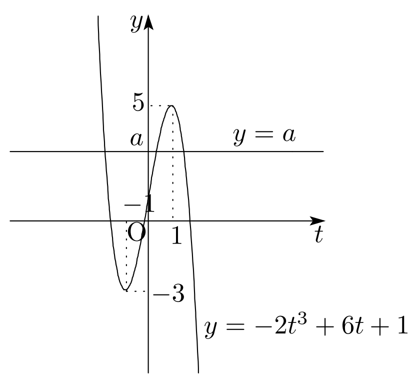
$f'(t) = -6t^2 + 6 = -6(t^2 - 1) =^6 (t + 1)(t - 1)$

$f'(t) = 0$ のとき，$t = -1,\ t = 1$,

また　$f(-1) = -3,\ f(1) = 5$

よって，$y = f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\ldots$	-1	$\ldots$	1	$\ldots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$



点 A を通って曲線 C に 3 本の接線が引けるときの a の値の範囲を求めるには，

$y = f(x)$ と $y = a$ の共有点の個数が 3 となる a の値の範囲を求めればよい，

よって，求める a の値の範囲は，　　　$\therefore\ -3 < a < 5$　〃

《参考》$y = x^3 + 3x^2 + x$

$y' = 3x^2 + 6x + 1$

$y'' = 6x + 6 = 6(x+1)$

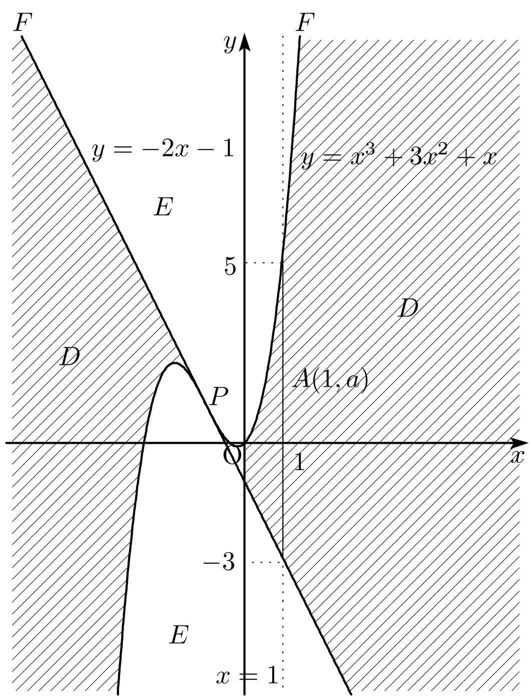
$y'' = 0$ とおくと，$x = -1,\ y = 1$

よって，変曲点は $P(-1, 1)$ である．

P における接線の傾きは $\left(y'\right)_{x=-1} = -2$ であるから，

ゆえに，変曲点 $P(-1, 1)$ における接線の方程式は，

$y - 1 = -2\bigl(x - (-1)\bigr) \qquad \therefore y = -2x - 1$



変曲点 $P(-1, 1)$ での接線 $y = -2x - 1$ と曲線 $y = x^3 + 3x^2 + x$ を境目にして，図のように

xy 平面を D，E および接線と曲線上の点からなる F の 3 つの領域に分けると，

D 内の点からは 3 本，E 内の点からは 1 本，F 上の点からは 2 本の接線が引けることが知られている．

直線 $x = 1$ 上の点 A で，領域 D 内にある y 座標の範囲を求めると，　$-3 < y < 5$　であるから，

よって，点 $A(1, a)$ から 3 本の接線が引ける a の条件は，

$-3 < a < 5$　〃