# 第５章　確率統計《§1　確率・確率分布》

260 確率密度関数に関する以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = k(1 - |x|)$ (ただし, $|x| \leqq 1$) が確率密度関数となるように定数 $k$ の値を定めよ,

ここで, 確率密度関数 $f(x)$ と $x$ 軸との間の面積は 1 であるという性質がある.

(2) $X$ を確率変数とするとき, (1) に示す確率密度関数 $f(x)$ から求められる確率 $P(-0.3 \leqq X \leqq 0.8)$ を求めよ.

(三重大)

《　ポイント：確率密度関数の基本的な性質　》

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad , \qquad P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)dx$$

(解)

(1) 条件より, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ が成り立つように $k$ の値を定めればよい,

$|x| \leqq 1$ より, $-1 \leqq x \leqq 1$ だから,

$$1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} k(1 - |x|) = k\int_{-1}^{1}(1 - |x|) = k\left\{\int_{-1}^{0}(1+x)dx + \int_0^1 (1-x)dx\right\}$$

$$= k\left\{\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right\}$$

$$= k\left\{-\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right\} = k\left(1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = k$$

よって, 定数 $k$ の値は,

$$\therefore k = 1 \quad /\!/$$

(2) (1) より, $f(x) = 1 - |x| \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$ だから,

$$\therefore P(-0.3 \leqq X \leqq 0.8) = \int_{-0.3}^{0.8} f(x)dx = \int_{-0.3}^{0.8}(1 - |x|)dx$$

$$= \int_{-0.3}^{0}(1+x)dx + \int_0^{0.8}(1-x)dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{2}x^2\right]_{-0.3}^{0} + \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{0.8}$$

$$= -\left(-0.3 + \frac{1}{2}\times 0.09\right) + \left(0.8 - \frac{1}{2}\times 0.64\right)$$

$$= 0.3 - 0.045 + 0.8 - 0.32 = 0.735 \quad /\!/$$