第５章　確率統計《§1　確率・確率分布》

$\boxed{263}$ 1 つのさいころを 6 の目が出るまで投げ続け，投げた回数を X とする．以下の問に答えよ．

(1) 確率 $P(X=1)$, $P(X=2)$ を求めなさい.

(2) 自然数 n に対して，確率 $P(X=n)$ を求めなさい.

(3) X の期待値 $E(X)$ を求めなさい.

(長岡技術科学大)

(解)

(1) $P(X=1)=\dfrac{1}{6}$ 〃　　$P(X=2)=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$ 〃

(2) $P(X=n)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{6}$ 〃

(3) $E(X)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,P(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

ここで，$|x|<1$ の範囲で，マクローリンの展開より，

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

であり，この範囲で項別微分可能であるから，

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$$

$$-\frac{(1-x)'}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}\qquad\therefore\ -\frac{-1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}$$

$$\therefore\ \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}$$

これに，$x=\dfrac{5}{6}$ を代入すると，

$$\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore E(X)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}=6\quad〃$$

(注) 解が 6 であることは，経験的にも分かる.