第５章　確率統計《§1　確率・確率分布》

$\boxed{268}$ 同時確率密度関数

$$f(x,y)=\begin{cases} 6(x-y) & 0 \leqq y < x \leqq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

をもつ連続な確率密度関数 X, Y を考える.

(1)　X, Y の周辺確率密度関数をそれぞれ求めよ.

(2)　X, Y の期待値 $E(X),\ E(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(3)　X, Y の分散 $V(X),\ V(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(筑波大)

(解)

(1)　X, Y の周辺確率密度関数をそれぞれ $f_X(x),\ f_Y(y)$ とすると，定義から,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases} \displaystyle\int_0^x 6(x-y)dy = 6\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]_0^x = 6\left(x^2-\frac{1}{2}x^2\right) = 3x^2 & (0<x\leqq 1) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 0\ dy = 0 & (x \leqq 0,\ 1<x) \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} \displaystyle\int_y^1 6(x-y)dx = 6\left[\frac{1}{2}x^2-xy\right]_y^1 = 6\left\{\left(\frac{1}{2}-y\right)-\left(\frac{1}{2}y^2-y^2\right)\right\} = 3-6y+3y^2 & (0\leqq y<1) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 0\ dy = 0 & (y<0,\ 1\leqq y) \end{cases}$$

(2)　(1) で求めた確率密度関数を利用する．定義から,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 xf_X(x)dx = \int_0^1 x\cdot 3x^2dx = \int_0^1 3x^3dx = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4} \quad 〃$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^1 yf_Y(y)dy = \int_0^1 y\cdot(3-6y+3y^2)dy$$

$$=\int_0^1 (3y-6y^2+3y^3)dy = \left[\frac{3}{2}y^2-2y^3+\frac{3}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{3}{2}-2+\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad 〃$$

(3)　(2) で求めた期待値を利用する.

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 = \int_0^1 x^2 f_X(x)dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx - \frac{9}{16}$$

$$=\int_0^1 3x^4dx - \frac{9}{16} = \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 - \frac{9}{16} = \frac{3}{5}-\frac{9}{16} = \frac{3}{80} \quad 〃$$

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2 = \int_0^1 y^2 f_Y(y)dy - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \int_0^1 y^2\cdot(3-6y+3y^2)dy - \frac{1}{16}$$

$$=\int_0^1 (3y^2-6y^3+3y^4)dy - \frac{1}{16} = \left[y^3-\frac{3}{2}y^4+\frac{3}{5}y^5\right]_0^1 - \frac{1}{16} = \left(1-\frac{3}{2}+\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{16} = \frac{3}{80} \quad 〃$$