第１章　微分積分 I《§2　積分》

$\boxed{40}$ 曲線 $A: y = \sin 2x$ と曲線 $B: y = a\sin x$ がある．$0 < a < 2,\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で,

以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 A と B の概形を描け.

(2) 曲線 A と x 軸で囲まれた面積を求めよ.

(3) 曲線 A と B で囲まれた面積が, (2) で求めた面積の 2 分の 1 のときの定数 a を求めよ,

(福井大)

(解)

(1) 《　ポイント：原点での微分係数を比べると, $x > 0$ で途中まで曲線 A と B の

どちらが上にあるか分かる　》

曲線 A において,

$\Big[y'\Big]_{x=0} = \Big[2\cos 2x\Big]_{x=0} = 2$

曲線 B において,

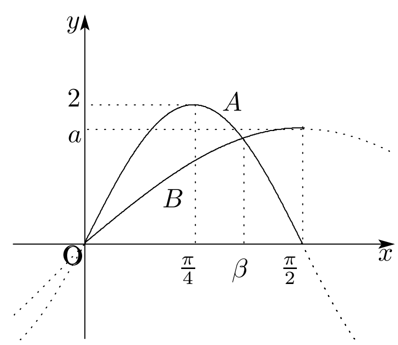
$\Big[y'\Big]_{x=0} = \Big[a\cos x\Big]_{x=0} = a$

条件より, $0 < a < 2$ であるから,

原点での微分係数を比べると, $x > 0$ の範囲で

途中まで曲線 A が曲線 B の上にある.

よって, グラフの概形は右のようになる.



(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\dfrac{1}{2}\Big[\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{1}{2}\Big(\cos\pi - \cos 0\Big)$

$= -\dfrac{1}{2}\Big((-1) - 1\Big) = 1$　〃

(3) 《　ポイント：交点の座標が具体的な数で求められないとき，文字を使って表す．　》

曲線 A と曲線 B の原点以外の交点の x 座標を β とすると，

$\sin 2\beta = a\sin\beta \quad \therefore 2\sin\beta\cos\beta = a\sin\beta$

ここで，$\sin\beta > 0$ であるから，　$\therefore \cos\beta = \dfrac{a}{2}$

よって，曲線 A と曲線 B で囲まれた図形の面積を S とすると，

$S = \displaystyle\int_0^\beta (\sin 2x - a\sin x)dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + a\cos x\right]_0^\beta$

$= \left(-\dfrac{1}{2}\cos 2\beta + a\cos\beta\right) - \left(-\dfrac{1}{2}\cos 0 + a\cos 0\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\cos 2\beta + a\cos\beta + \dfrac{1}{2} - a$

ここで，$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$ であるから，

$S = -\dfrac{1}{2}(2\cos^2\beta - 1) + a\cos\beta + \dfrac{1}{2} - a$

$= -\cos^2\beta + \dfrac{1}{2} + a\cos\beta + \dfrac{1}{2} - a$

$= -\cos^2\beta + a\cos\beta - a + 1$

$= -\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a\left(\dfrac{a}{2}\right) - a + 1$

$= -\dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 - a + 1 = \dfrac{1}{4}a^2 - a + 1$

ここで，条件 $S = \dfrac{1}{2}$ より，

$\dfrac{1}{4}a^2 - a + 1 = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$a^2 - 4a + 2 = 0 \qquad \therefore a = 2 \pm \sqrt{2}$

ここで，$0 < a < 2$ より，

$\therefore a = 2 - \sqrt{2}$ 〃