第１章　微分積分Ｉ《§2　積分》

$\boxed{43}$ a, b は実数で，$0 < a < 1$ を満たすとする．xy 平面において，2 つの関数のグラフ

$C : y = \log x$，$\ell : y = ax + b$ がただ一つの共有点を持ったとき，次の問に答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) $b > 0$ となるような a の範囲を求めよ．

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，曲線 C，および 3 直線 ℓ, $x = 0$, $y = 0$ で囲まれた部分の面積を求め，a のみを用いて表せ．

(愛媛大)

《　ポイント：2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = t$ で接するとき，

$f(t) = g(t)$ と $f'(t) = g'(t)$ が成り立つ．　》

(解)

(1) 曲線 C の形と直線 ℓ の傾き a が正であることから，ただ一つの共有点をもつときは，

曲線 C と直線 ℓ が接する場合である．

接点の x 座標を t とすると，$x = t$ において曲線 C と直線 ℓ の y 座標は等しいから，

$\log t = at + b$

$C : y = \log x$ において，$y' = \dfrac{1}{x}$,

$x = t$ において曲線 C と直線 ℓ の傾きは等しいから，

$\dfrac{1}{t} = a \qquad \therefore t = \dfrac{1}{a}$

よって，$\log \dfrac{1}{a} = a \cdot \dfrac{1}{a} + b$

$\log a^{-1} = 1 + b$ より，$-\log a = 1 + b$

$\therefore b = -\log a - 1$　〃

(2) 条件 $b > 0$ と (1) より，$-\log a - 1 > 0$,　$\therefore \log a < -1$

よって，$\log_e a < -\log_e e$,　したがって，$\log_e a < \log_e e^{-1}$

$\therefore \log a < \log \dfrac{1}{e}$

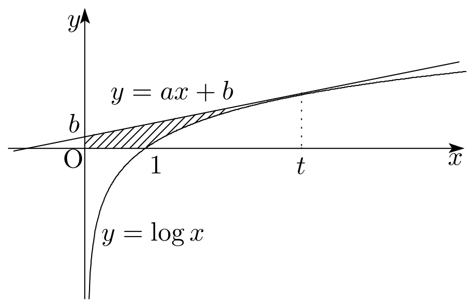
曲線 $C : y = \log x$ は，$x > 0$ において単調増加であるから，

$\therefore\ a < \dfrac{1}{e}$

これと条件 $0 < a < 1$ より，

$0 < a < \dfrac{1}{e}$　〃

(3) (2) より，$0 < a < \dfrac{1}{e}$ であるから，$\dfrac{1}{a} > e,\quad \therefore t > e$



求める面積を S とおくと，

$S = \displaystyle\int_0^t (ax+b)dx - \int_1^t \log x dx$

(1) より，$b = -\log a - 1,\ t = \dfrac{1}{a}$ であるから，

$S = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} (ax - \log a - 1)dx - \int_1^{\frac{1}{a}} \log x dx$

$= \left[\dfrac{1}{2}ax^2 - (\log a + 1)x\right]_0^{\frac{1}{a}} - \left\{\left[x\log x\right]_1^{\frac{1}{a}} - \displaystyle\int_1^{\frac{1}{a}} x \cdot \dfrac{1}{x}dx\right\}$

$= \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{1}{a^2} - (\log a + 1) \cdot \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a}\log\dfrac{1}{a} + \displaystyle\int_1^{\frac{1}{a}} 1dx$

$= \dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{a}(\log a + 1) - \dfrac{1}{a}\log a^{-1} + \left[x\right]_1^{\frac{1}{a}}$

$= \dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{a}\log a - \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a}\log a + \dfrac{1}{a} - 1$

$= \dfrac{1}{2a} - 1$ 〃