第１章　微分積分 I《§2　積分》

$\boxed{47}$ $x=2(\theta-\sin\theta)$, $y=1-2\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ で表される曲線について，以下にの問いに答えよ.

(1) $y\geqq 0$ となる θ の範囲を求めよ.

(2) $y\geqq 0$ の範囲の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

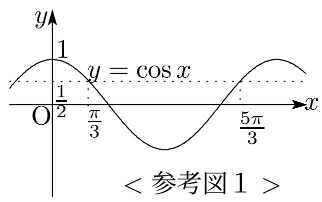
(豊橋技術科学大)

《　ポイント：媒介変数表示による図形の面積を求めるには，まず図形の概形を描き，面積を x での積分の式で表した後，$x=x(t)$ で置換積分して t で積分するとよい.　》

(解)

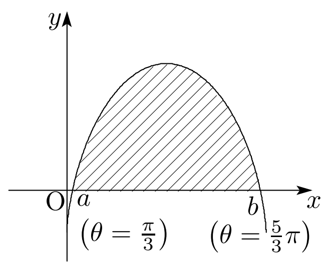
(1) $y=1-2\cos\theta\geqq 0$ より，

$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$ だから，　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$ 〃



＜参考図１＞

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$x=a$，$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき，$x=b$ とおくと，



$S=\displaystyle\int_a^b ydx$

$x=2(\theta-\sin\theta)$ と置換すると，$y=1-2\cos\theta$ となり，

$\dfrac{dx}{d\theta}=2(1-\cos\theta)$

$\therefore S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} y\frac{dx}{d\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(1-2\cos\theta)\cdot 2(1-\cos\theta)d\theta$

$=2\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(1-3\cos\theta+2\cos^2\theta)d\theta$　　《　ポイント：半角の公式 $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$　》

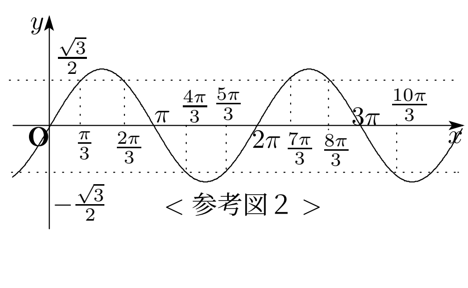
$=2\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(1-3\cos\theta+1+\cos 2\theta)d\theta=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(2-3\cos\theta+\cos 2\theta)d\theta$

$=2\left[2\theta-3\sin\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}$

$=2\left\{\left(\dfrac{10}{3}\pi-3\sin\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{10}{3}\pi\right)-\left(\dfrac{2}{3}\pi-3\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$=2\left\{\left(\dfrac{10}{3}\pi-3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)-\left(\dfrac{2}{3}\pi-3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

$=2\left(\dfrac{10}{3}\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$



＜参考図２＞

$=2\left(\dfrac{8}{3}\pi+3\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\dfrac{8}{3}\pi+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\dfrac{16}{3}\pi+5\sqrt{3}$ 〃