第１章　微分積分 I《§2　積分》

$\boxed{50}$ 積分を利用して，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(筑波大)

《　ポイント：複雑な式でも，自然対数をとると，簡単な式になることがある．　》

《　ポイント：区分求積法 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$ を使う．　》

(解)

$y_n=\dfrac{1}{n}\left\{\dfrac{(2n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$ とおき，両辺の自然対数をとると，

$$\log y_n=\log\frac{1}{n}+\log\left\{\frac{(2n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$\log y_n=\log\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\Big\{\log(2n)!-\log n!\Big\}$$

$$=\log\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\Big\{\Big(\log(2n)+\log(2n-1)+\cdots+\log 1\Big)-\Big(\log n+\log(n-1)+\cdots+\log 1\Big)\Big\}$$

$$=\log\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\Big\{\log(2n)+\log(2n-1)+\cdots+\log(n+1)\Big\}$$

$$=\log\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\Big\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(n+n)\Big\}=\log\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n+k)$$

$$=\frac{1}{n}\left(n\log\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n+k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n+k)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\log\frac{1}{n}+\log(n+k)\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n+k}{n}$$

$$\therefore\ \log y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\log y_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\log(1+x)dx$$

$$=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$=2\log 2-\int_0^1 1dx=2\log 2-\Big[x\Big]_0^1=\log 2^2-1=\log 4-\log e=\log\frac{4}{e}$$

ここで，$\log_e y_n=\log y_n$ より，$y_n=e^{\log y_n}$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}e^{\log y_n}=e^{\log\frac{4}{e}}=\frac{4}{e}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}\quad〃$$