第１章　微分積分Ｉ《§1　関数の展開》

$\boxed{57}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)\quad (n=1,2,3\cdots)$ によって定めるとき，

(1)〜(3) に答えよ．

(1)　$n \geqq 1$ であるすべての n に対して，$a_n>\sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(2)　$n \geqq 1$ であるすべての n に対して，$a_{n+1}-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})$ であることを証明せよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(京都大)

(解)

(1)　$a_n>\sqrt{3}\cdots\cdots①$

数学的帰納法で証明する．明らかに $a_n>0$ である．

(i)　$n=1$ のとき，$a_1=3>\sqrt{3}$ だから，① は成り立つ．

(ii)　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると，

$a_k>\sqrt{3}$ であるから，

$a_{k+1}-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\left(a_k+\dfrac{3}{a_k}\right)-\sqrt{3}$

$=\dfrac{1}{2a_k}\left({a_k}^2-2\sqrt{3}a_k+3\right)=\dfrac{1}{2a_k}\left(a_k-\sqrt{3}\right)^2>0$

$\therefore a_{k+1}>\sqrt{3}$

よって，$n=k+1$ のときも，① は成り立つ．

したがって，(i),(ii) より，数学的帰納法によって，

すべての自然数 n について，① は成り立つ．

$\therefore a_n>\sqrt{3}$　〃

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)$，また，(1) より，$\sqrt{3}-a_n<0$ であるから，

$a_{n+1}-\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})$

$=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)-\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})$

$=\dfrac{1}{2a_n}\left({a_n}^2+3-2\sqrt{3}a_n-{a_n}^2+\sqrt{3}a_n\right)$

$=\dfrac{1}{2a_n}\left(3-\sqrt{3}a_n\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2a_n}\left(\sqrt{3}-a_n\right)<0$

$\therefore a_{n+1}-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})$　〃

《　ポイント：はさみうちの原理　》

3 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ について,

常に $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ であり，かつ, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$　（α は定数）ならば,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である.

(3) (解) (1), (2) より,

$$0 < a_n - \sqrt{3} < \frac{1}{2}(a_{n-1} - \sqrt{3})$$

$$< \frac{1}{2^2}(a_{n-2} - \sqrt{3}) < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - \sqrt{3})$$

ここで, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - \sqrt{3}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}(3 - \sqrt{3}) = 0$ であるから,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3} \quad 〃$$

(注)　漸化式 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$　$(n = 1, 2, 3 \cdots)$ は,

ニュートン法による $\sqrt{3}$ の近似値を求める漸化式である.

《　ポイント：(2) の代わりに $a_{n+1} < a_n$ を証明し，有界単調減少であることから

収束を証明することができる.　》

(3) (別解)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) - a_n$$

$$= \frac{1}{2a_n}\left({a_n}^2 + 3 - 2{a_n}^2\right) = \frac{1}{2a_n}\left(3 - {a_n}^2\right)$$

ここで, (1) より, $a_n > \sqrt{3}$ だから, ${a_n}^2 > 3$

よって, $3 - {a_n}^2 < 0$

したがって, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2a_n}\left(3 - {a_n}^2\right) < 0$

$$\therefore a_{n+1} < a_n$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は単調減少だから収束する.

そこで, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とすると,

$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$ より,　　$a = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{3}{a}\right)$

$2a^2 = a^2 + 3$　　$\therefore a^2 = 3$

$a > 0$ より,　　$\therefore a = \sqrt{3}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3} \quad 〃$$