第１章　微分積分 I《§1　関数の展開》

62 x を 0 でない実数とする．このとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{1+\cos\left(\frac{1}{n}x\right)+\cos\left(\frac{2}{n}x\right)+\cdots+\cos\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right\}=\frac{\sin x}{x}$$

(神戸大)

《　ポイント：左辺は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k-1}{n}x\right)$ と表せるから，区分求積法を用いる．　》

$f(t)=\cos(tx)$ とおくと，$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

(解)

$f(t)=\cos(tx)$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{1+\cos\left(\frac{1}{n}x\right)+\cos\left(\frac{2}{n}x\right)+\cdots+\cos\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(t)dt$$

$$=\int_0^1\cos(tx)dt=\left[\frac{1}{x}\sin(tx)\right]_0^1=\frac{1}{x}\sin x-\frac{1}{x}\sin 0=\frac{\sin x}{x}\quad〃$$

(別解)

$f(x)=1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos(n-1)x$ とおくと，

$$f(x)\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}+\cos x\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\sin\frac{x}{2}+\cos 3x\sin\frac{x}{2}+\cdots+\cos(n-1)x\sin\frac{x}{2}$$

ここで，$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\Big\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\Big\}$ であるから，

$$f(x)\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7}{2}x-\sin\frac{5}{2}x\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2n-1}{2}x-\sin\frac{2n-3}{2}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)+\left(\sin\frac{7}{2}x-\sin\frac{5}{2}x\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\sin\frac{2n-1}{2}x-\sin\frac{2n-3}{2}x\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}x\right)$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{2n-1}{2}x\right)$$

ここで，$f\left(\dfrac{x}{n}\right) = 1 + \cos\dfrac{1}{n}x + \cos\dfrac{2}{n}x + \cos\dfrac{3}{n}x + \cdots + \cos\dfrac{n-1}{n}x$ であるから，

$$\text{与式} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{1 + \cos\frac{1}{n}x + \cos\frac{2}{n}x + \cos\frac{3}{n}x + \cdots + \cos\frac{n-1}{n}x\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2\sin\frac{x}{2n}}\left(\sin\frac{x}{2n} + \sin\frac{2n-1}{2n}x\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2n}}{\sin\frac{x}{2n}}\left\{\sin\frac{x}{2n} + \sin\left(1 - \frac{1}{2n}\right)x\right\} = \frac{1}{x}\cdot 1\cdot(0 + \sin x) = \frac{1}{x}\sin x = \frac{\sin x}{x} \quad /\!/$$

《　ポイント：$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$　》

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2n} = 0$ より，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}} = 1$ である．　よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2n}}{\sin\frac{x}{2n}} = 1$