第１章　微分積分 I《§1　関数の展開》

$\boxed{63}$ 実数 θ において，$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}x^n$ とおく．

(1)　右辺の級数は $|x|<1$ で収束することを示せ．

(2)　$f'(x)=\dfrac{\sin x}{1-2x\cos\theta+x^2}$ を示せ．　$\left[\ \text{ヒント：}\quad \sin t=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\ \right]$

(埼玉大)

《　ポイント　》

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する．

② 正項級数において，$a_n \leqq b_n$ のとき，

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束 $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する．

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が発散 $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ も発散する．

(解)

(1)　$\left|\dfrac{\sin n\theta}{n}x^n\right|=\dfrac{|\sin n\theta|}{n}|x^n| \leqq \dfrac{1}{n}|x^n| \leqq |x|^n$ が成り立つ．

ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ は，初項 $|x|$，公比 $|x|$ の無限等比級数であるから，$|x|<1$ で収束する．

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\theta}{n}x^n\right|$ は，$|x|<1$ で収束するといえるから．

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}x^n$ は，$|x|<1$ で収束する．

《　ポイント：オイラーの公式　　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　》

$e^{-i\theta}=e^{i(-\theta)}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$

$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta \qquad \therefore\ \cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta \qquad \therefore\ \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$|e^{i\theta}|=|\cos\theta+i\sin\theta|=1 \qquad |e^{-i\theta}|=|\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)|=1$

(解)

(2) ベキ級数は収束域 $|x|<1$ の内部で項別微分可能であるから,

$|x|<1$ のとき,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}\cdot nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sin n\theta)x^{n-1}$$

ここで, $\sin(n\theta)=\dfrac{e^{i(n\theta)}-e^{-i(n\theta)}}{2i}=\dfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ であるから,

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}x^{n-1}\\
&=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)x^{n-1}=\frac{1}{2i}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\theta}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\theta}x^{n-1}\right\}\\
&=\frac{1}{2i}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\theta}e^{i(n-1)\theta}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-i\theta}e^{-i(n-1)\theta}x^{n-1}\right\}\\
&=\frac{1}{2i}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\theta}\left(e^{i\theta}x\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-i\theta}\left(e^{-i\theta}x\right)^{n-1}\right\}
\end{aligned}$$

ここで, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\theta}\left(e^{i\theta}x\right)^{n-1}$ は, 初項 $e^{i\theta}$, 公比 $e^{i\theta}x$ の無限等比級数であり,

$|e^{i\theta}|=1$, $|x|<1$ より, $|e^{i\theta}x|<1$ であるから, この無限等比級数は収束する.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{i\theta}\left(e^{i\theta}x\right)^{n-1}=\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}$$

同様にして, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-i\theta}\left(e^{-i\theta}x\right)^{n-1}$ は, 初項 $e^{-i\theta}$, 公比 $e^{-i\theta}x$ の無限等比級数であり,

$|e^{-i\theta}|=1$, $|x|<1$ より, $|e^{-i\theta}x|<1$ であるから, この無限等比級数は収束する.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-i\theta}\left(e^{-i\theta}x\right)^{n-1}=\frac{e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}x}$$

よって,

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}-\frac{e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}x}\right)\\
&=\frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{i\theta}(1-e^{-i\theta}x)-e^{-i\theta}(1-e^{i\theta}x)}{(1-e^{i\theta}x)(1-e^{-i\theta}x)}\\
&=\frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{1-x(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+x^2}\\
&=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\sin\theta}{1-x\cdot 2\cos\theta+x^2}=\frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\quad /\!/
\end{aligned}$$