第１章　微分積分 I《§1　関数の展開》

$\boxed{68}$ 関数 $f(x)=\sin 2x$ の $x=\dfrac{\pi}{2}$ において，テイラー展開について，以下の問に答えよ．

(1) $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4$ の項までのテイラー展開を求めよ．ただし，ここでは剰余項は求めなくてよい．

(2) $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ を満たす範囲の x に対して，剰余項 R_5 は $|R_5|<\dfrac{\pi^5}{5!}$ を満たすことを示せ．

(筑波大)

《　ポイント：テイラーの定理　》

関数 $f(x)$ が a を含む区間 I で n 回微分可能であるとき，I に含まれる任意の x に対して，

次の等式を満たす θ が存在する，

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n$$

ただし，$R_n=\dfrac{f^{(n)}\Big(a+\theta(x-a)\Big)}{n!}(x-a)^n$ ，　$(0<\theta<1)$

(解)

(1) $f(x)=\sin 2x$ の $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4$ の項までのテイラー展開は,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$$

ここで，$f(x)=\sin 2x$，$f'(x)=2\cos 2x$，$f''(x)=-2^2\sin 2x$，

$f'''(x)=-2^3\cos 2x$，$f^{(4)}=2^4\sin 2x$ より，

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\pi=0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos\pi=2\cdot(-1)=-2$，$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2^2\sin\pi=0$，

$f'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2^3\cos\pi=-2^3\cdot(-1)=2^3$，$f^{(4)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2^4\sin\pi=0$ であるから，

したがって，$f(x)=\sin 2x$ の $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4$ の項までのテイラー展開は,

$$\frac{-2}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2^3}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\cdots=-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\cdots \quad 〃$$

(2) $f^{(5)}(x)=2^5\cos 2x$　　$\therefore \left|f^{(5)}(x)\right|=\left|2^5\cos 2x\right|$

ここで，$\left|\cos 2x\right|\leqq 1$ より，$\therefore \left|f^{(5)}(x)\right|\leqq 2^5$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ を満たす x の剰余項 R_5 について，

$$\left|R_5\right|=\left|\frac{f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{5!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5\right| \quad (0<\theta<1)$$

$$\leqq\frac{2^5}{5!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5<\frac{2^5}{5!}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)^5=\frac{2^5}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5=\frac{2^5}{5!}\cdot\frac{\pi^5}{2^5}=\frac{\pi^5}{5!} \qquad \therefore \left|R_5\right|<\frac{\pi^5}{5!} \quad 〃$$