第２章　微分積分 II《§2　偏微分》

$\boxed{93}$ $f(x, y) = x^2 - x^4 - y^2$ を領域 $R : x^2 + y^2 \leqq 1$ で考える.

(1)　領域 R の内部における $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(2)　R における関数 $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(名古屋工業大)

《　ポイント：$z = f(x, y)$ の極値の判定　》

① $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) を求める．この点で極値をもつ可能性がある.

② ヘッシアン $H = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$,　$\Big($ただし，$f_{xy} = f_{yx}\Big)$

これに ① で求めた点を代入して,

(i) $H > 0$ ならば極値をもつ.　(ii) $H < 0$ ならば極値をもたない.

(iii) $H = 0$ ならば判定不能.

③ $H > 0$ ならば,

(i) $f_{xx} > 0$ のとき，極小.　(ii) $f_{xx} < 0$ のとき，極大.

(解)

(1)　$f(x, y) = x^2 - x^4 - y^2$ より,

$f_x = 2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2) = 0$ とおくと，$x = 0$，$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f_y = -2y = 0$ とおくと，$y = 0$

よって，$f_x = f_y = 0$ を満たす点 $(0, 0)$，$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ で極値をもつ可能性がある,

$f_{xx} = 2 - 12x^2$,　$f_{xy} = f_{yx} = 0$,　$f_{yy} = -2$

$H = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = (2 - 12x^2)\cdot(-2) - 0^2 = 24x^2 - 4$

点 $(0, 0)$ のとき，$H = 24\cdot 0^2 - 4 = -4 < 0$　よって，極値をもたない.

点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ のとき，$H = 24\cdot\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 = 8 > 0$　よって，極値をもつ.

また，$f_{xx} = 2 - 12\cdot\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -4 < 0$ より，極大である.

このとき，$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - 0^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

よって，極大値　$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \dfrac{1}{4}$　〃

《　ポイント：ラグランジュの未定乗数法　》

条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで，関数 $z=f(x,y)$ の極値をとる点において，

$$f_x=\lambda\varphi_x\ ,\quad f_y=\lambda\varphi_y \qquad (\ \lambda \text{ は定数 }) \quad \cdots\cdots\ (*)$$

$(*)$ 式と $\varphi(x,y)=0$ を連立で解けば，極値をとり得る点を求めることができる．

$\varphi_x\neq 0,\ \varphi_y\neq 0$ のときは，$(*)$ 式を次のように表すこともできる．

$$\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}$$

(解)

(2) $R : x^2+y^2 \leqq 1$ は有界閉領域であるから，最大値，最小値が存在し，その点が内部にあるときは

$f_x=f_y=0$ となる点である．　境界線上にあるときは条件付き極値をとり得る点である．

ラグランジュの未定乗数法を用いて，

$x^2+y^2=1$ のもとで，$f(x,y)$ の極値をとり得る点を求める．

$\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ とおくと，

$\varphi_x=2x\ ,\quad \varphi_y=2y$

$f_x=\lambda\varphi_x$ より，$2x^2-4x^3=\lambda\cdot 2x$

$\therefore 4x^3+2(\lambda-1)x=0\ \cdots\cdots$ ①

$f_y=\lambda\varphi_y$ より，$-2y=\lambda\cdot 2y$

$\therefore (\lambda+1)y=0\ \cdots\cdots$ ②

(i) $y\neq 0$ のとき，② から，$\lambda=-1$

これを ① に代入して，

$4x^3+2\big((-1)-1\big)x=0 \qquad x(x^2-1)=0 \qquad \therefore x=0,\ x=\pm 1$

$x=\pm 1$ のとき，$x^2+y^2=1$ より，$y=0$ となって，不適．

$x=0$ のとき，$x^2+y^2=1$ より，$y=\pm 1$

よって，点 $(0,\pm 1)$ のとき，極値をとり得る．

極値は，$f(0,\pm 1)=0^2-0^4-(\pm 1)^2=-1$

(ii) $y=0$ のとき，$x^2+y^2=1$ より，$x=\pm 1$

よって，点 $(\pm 1,0)$ のとき，極値をとり得る．

極値は，$f(\pm 1,0)=(\pm 1)^2-(\pm 1)^4-0^2=0$

この結果と (1) より，

極大値　$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)=\dfrac{1}{4}$ ，　極値　$f\,(0,\ \pm 1)=-1$ ，　極値　$f\,(\pm 1,\ 0)=0$

したがって，

最大値　$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)=\dfrac{1}{4}$　〃　　最小値　$f\,(0,\ \pm 1)=-1$　〃