微分法 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.2)$　解答例

1. 次の関数は $x=2$ において連続であるかどうか調べよ。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & (x\neq 2\text{ のとき})\\ 4 & (x=2\text{ のとき})\end{cases}$$

（解）$x\neq 2$ のとき　$f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1$

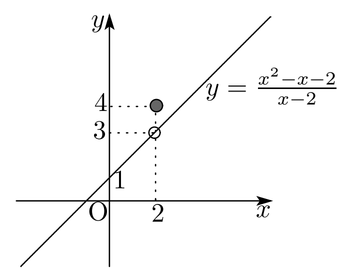
であるから、グラフは図のようになる。

$\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$

$x=2$ のとき　条件より　$f(x)=4$　$\therefore f(2)=4$

$\boxed{\therefore \displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)\neq f(2)}$

よって、関数 $f(x)$ は $\underline{x=2\text{ で連続でない。}}$ 〃



2. 次の関数は $x=0$ において連続であるかどうか調べよ。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|^3}{x} & (x\neq 0\text{ のとき})\\ 0 & (x=0\text{ のとき})\end{cases}$$

（解）$x\neq 0$ のとき

$x>0$ のとき　$f(x)=\dfrac{|x|^3}{x}=\dfrac{x^3}{x}=x^2$

$x<0$ のとき　$f(x)=\dfrac{|x|^3}{x}=\dfrac{(-x)^3}{x}=\dfrac{-x^3}{x}=-x^2$

であるから、グラフは図のようになる。

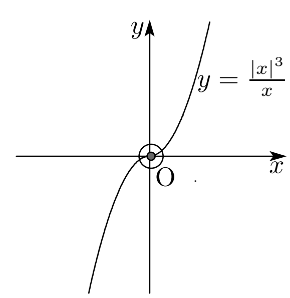
$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}x^2=0\,,\quad \lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}(-x^2)=0$ であるから

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$

$x=0$ のとき　条件より　$f(x)=0$　$\therefore f(0)=0$

$\boxed{\therefore \displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)}$

よって、関数 $f(x)$ は $\underline{x=0\text{ で連続である。}}$ 〃



3. 方程式 $x^3 - x - 4 = 0$ は区間 $(1, 2)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

（解）$f(x) = x^3 - x - 4$ とおくと

$f(x)$ は区間 $[1, 2]$ で連続で、

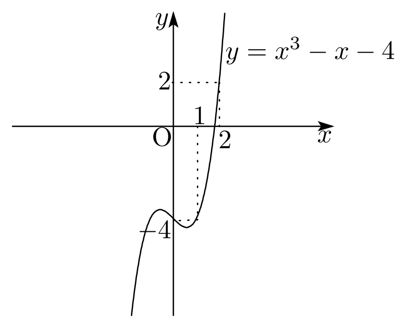
$f(1) = 1^3 - 1 - 4 = -4 < 0$

$f(2) = 2^3 - 2 - 4 = 8 - 2 - 4 = 2 > 0$

$f(1)$ と $f(2)$ は異符号だから、

中間値の定理より　$f(x) = 0 \quad (1 < x < 2)$　を満たす x が少なくとも 1 つ存在する。

よって、$f(x) = 0$ すなわち $x^3 - x - 4 = 0$ は区間 $(1, 2)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。　〃



4. 方程式 $\sin x = x - 1$ は区間 $(0, \pi)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

（解）$\sin x = x - 1$ より　$\sin x - x + 1 = 0$

$f(x) = \sin x - x + 1$ とおくと

$f(x)$ は区間 $[0, \pi]$ で連続で、

$f(0) = \sin 0 - 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1 > 0$

$f(\pi) = \sin \pi - \pi + 1 = 0 - \pi + 1 = 1 - \pi < 0$

$f(0)$ と $f(\pi)$ は異符号だから、

中間値の定理より　$f(x) = 0 \quad (0 < x < \pi)$　を満たす x が少なくとも 1 つ存在する。

よって、$f(x) = 0$ すなわち $\sin x = x - 1$ は区間 $(0, \pi)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。　〃