

微分法 基礎 小テスト (No.3) 解答例

1. 関数 $f(x) = x^3$ について、次の問に答えよ。

(1) $x = 1$ から $x = 2$ までの平均変化率を求めよ。

(解) $y = f(x) = x^3$ とおくと、平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2^3 - 1^3}{2 - 1} = \frac{8 - 1}{1} = 7 \quad "$$

参考 これから、図の直線 AB の傾きが 7 であることがわかる。

(2) $x = a$ における微分係数 (変化率) を定義よって求めよ。

(解) $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3a^2 + 3ah + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2 \quad "$$

(3) 曲線 $y = x^3$ 上の点 $A(1, 1)$ における接線の傾きを求めよ。

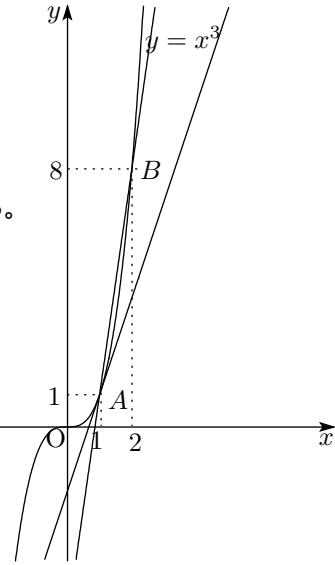
(解) (2) から $f'(a) = 3a^2$ であるから、点 $(1, 1)$ における接線の傾きは、 $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3 \quad "$

参考

点 (a, b) を通り、傾き m の
直線の方程式は
 $y - b = m(x - a)$

\implies

点 $(1, 1)$ における接線の方程式は
 $y - 1 = 3(x - 1)$
 $y = 3x - 2$



2. 関数 $y = \frac{4}{x}$ において、次の問に答えよ。

(1) 導関数を定義よって求めよ。

(解1) $y = f(x) = \frac{4}{x}$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{h} \left\{ \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(-h)}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4}{x(x+h)} = -\frac{4}{x^2} \quad "$$

(解2) $y = f(x) = \frac{4}{x}$ とおくと

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \left\{ \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \right\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(-h)}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4}{x(x+h)} = -\frac{4}{x^2} \quad "$$

(2) $x = 4$ における微分係数 (変化率) を求めよ。

(解) $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=4} = -\frac{4}{4^2} = -\frac{1}{4} \quad "$

参考

曲線 $y = \frac{4}{x}$ 上の点 $P(4, 1)$ における接線の傾きは $-\frac{1}{4}$ である。

よって、接線の方程式は

$$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 4) \quad y - 1 = -\frac{1}{4}x + 1 \quad y = -\frac{1}{4}x + 2 \quad "$$

