微分法 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.5)$　解答例

1. 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(4x^2-3x+2)^5$

(解) $u=4x^2-3x+2$ とおくと、$y=u^5$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}u^5\cdot\frac{d}{dx}(4x^2-3x+2)=5u^4\cdot(8x-3)=5(4x^2-3x+2)^4(8x-3)\quad〃$$

(2) $y=\dfrac{4}{(3x-2)^6}$

(解) $u=3x-2$ とおくと、$y=\dfrac{4}{u^6}=4\cdot\dfrac{1}{u^6}=4u^{-6}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}(4u^{-6})\cdot\frac{d}{dx}(3x-2)$$

$$=4\cdot(-6)u^{-6-1}\cdot3=-24u^{-7}\cdot3=-72\cdot\frac{1}{u^7}=-\frac{72}{(3x-2)^7}\quad〃$$

2. 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\sqrt{x}$

(解) $y=x\sqrt{x}=x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{1+\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}\quad〃$$

(2) $y=\sqrt[4]{x^3+5x+2}$

(解) $u=x^3+5x+2$ とおくと、$y=\sqrt[4]{u}=u^{\frac{1}{4}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}u^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{d}{dx}(x^3+5x+2)=\frac{1}{4}u^{\frac{1}{4}-1}\cdot(3x^2+5)=\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}\cdot(3x^2+5)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u^{\frac{3}{4}}}\cdot(3x^2+5)=\frac{3x^2+5}{4\sqrt[4]{u^3}}=\frac{3x^2+5}{4\sqrt[4]{(x^3+5x+2)^3}}\quad〃$$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x-7}}$

(解) $u=x^2+3x-7$ とおくと、　$y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}=\dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}}=u^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}u^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3x-7)=-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(2x+3)=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x+3)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\cdot(2x+3)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^3}}\cdot(2x+3)=-\frac{2x+3}{2\sqrt{(x^2+3x-7)^3}}\quad〃$$

《参考資料》

基礎数学の公式 (1)	$\Longrightarrow$	$\frac{1}{x^n}=x^{-n}$
基礎数学の公式 (2)	$\Longrightarrow$	$\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$
基礎数学の公式 (3)	$\Longrightarrow$	$\sqrt[m]{x}=x^{\frac{1}{m}}$
(1)(2) の応用公式	$\Longrightarrow$	$\dfrac{1}{\sqrt[m]{x^n}}=\dfrac{1}{x^{\frac{n}{m}}}=x^{-\frac{n}{m}}$
(1)(3) の応用公式	$\Longrightarrow$	$\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{m}}}=x^{-\frac{1}{m}}$

《参考資料》

微分の公式	$\Longrightarrow$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
速解の公式	$\Longrightarrow$	$\{(f(x))^n\}' = n\,(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$
c が定数	$\Longrightarrow$	$(cx)' = c$, $(c)' = 0$

≪別解の研究≫

1. 次の関数を微分せよ。

(1) $y = (4x^2-3x+2)^5$

(別解) $y' = 5(4x^2-3x+2)^{5-1}\cdot(4x^2-3x+2)' = 5(4x^2-3x+2)^4(8x-3)$ 〃

(2) $y = \dfrac{4}{(3x-2)^6}$

(別解) $y = \dfrac{4}{(3x-2)^6} = 4(3x-2)^{-6}$

$y' = 4\cdot(-6)(3x-2)^{-6-1}\cdot(3x-2)' = -24(3x-2)^{-7}\cdot 3$

$= -72\cdot\dfrac{1}{(3x-2)^7} = -\dfrac{72}{(3x-2)^7}$ 〃

2. 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x\sqrt{x}$

(別解) $y = x\sqrt{x} = x\cdot x^{\frac{1}{2}}$

$y' = (x)'\cdot x^{\frac{1}{2}} + x\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 1\cdot x^{\frac{1}{2}} + x\cdot\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\cdot x\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$= x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}x^{1-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ 〃

(2) $y = \sqrt[4]{x^3+5x+2}$

(別解) $y = \sqrt[4]{x^3+5x+2} = (x^3+5x+2)^{\frac{1}{4}}$

$y' = \dfrac{1}{4}(x^3+5x+2)^{\frac{1}{4}-1}\cdot(x^3+5x+2)' = \dfrac{1}{4}(x^3+5x+2)^{-\frac{3}{4}}\cdot(3x^2+5)$

$= \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{(x^3+5x+2)^{\frac{3}{4}}}\cdot(3x^2+5) = \dfrac{3x^2+5}{4\sqrt[4]{(x^3+5x+2)^3}}$ 〃

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x-7}}$

(別解) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x-7}} = \dfrac{1}{(x^2+3x-7)^{\frac{1}{2}}} = (x^2+3x-7)^{-\frac{1}{2}}$

$y' = -\dfrac{1}{2}(x^2+3x-7)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+3x-7)' = -\dfrac{1}{2}(x^2+3x-7)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x+3)$

$= -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(x^2+3x-7)^{\frac{3}{2}}}\cdot(2x+3) = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+3x-7)^3}}\cdot(2x+3)$

$= -\dfrac{2x+3}{2\sqrt{(x^2+3x-7)^3}} = -\dfrac{2x+3}{2(x^2+3x-7)\sqrt{x^2+3x-7}}$ 〃