微分法 ≪基礎≫ 小テスト　(No.6)　解答例

1. 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{x}$

(解)　$4x=t$ とおくと　　$x\to 0$ のとき　$t\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{\frac{t}{4}}=4\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=4\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{t}$$

$$=4\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}=4\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=4 \quad //$$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 8x}$

(解)　$6x=t$, $8x=s$ とおくと　　$x\to 0$ のとき　$t\to 0$, $s\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6x}{\frac{\sin 8x}{8x}\cdot 8x}=\frac{6}{8}\cdot\frac{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}{\lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{s}}=\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{4} \quad //$$

2. 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\cos^3 x$

(解)　$u=\cos x$ とおくと　$y=u^3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}u^3\cdot\frac{d}{dx}\cos x=3u^2\cdot(-\sin x)=3\cos^2 x(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x \quad //$$

(2) $y=\cot(3x-2)$

(解)　$u=3x-2$ とおくと　$y=\cot u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\cot u\cdot\frac{d}{dx}(3x-2)=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot 3=-3\operatorname{cosec}^2(3x-2) \quad //$$

(3) $y=\sin^4 2x$

(解 1)　$u=2x$ とおくと　$y=\sin^4 u$

さらに　$v=\sin u$ とおくと　$y=v^4$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{dv}v^4\cdot\frac{d}{du}\sin u\cdot\frac{d}{dx}2x$$

$$=4v^3\cdot\cos u\cdot 2=8\sin^3 u\cos u=8\sin^3 2x\cos 2x \quad //$$

(解 2)　$u=2x$ とおくと　$y=\sin^4 u$

さらに　$v=\sin u$ とおくと　$y=v^4$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dv}v^4\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4v^3\cdot\frac{d}{du}\sin u\cdot\frac{d}{dx}2x$$

$$=4v^3\cdot\cos u\cdot 2=8\sin^3 u\cos u=8\sin^3 2x\cos 2x \quad //$$

≪別解の研究≫　$\Longrightarrow$　速解法

1. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{x}$

(別解)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{4x}\cdot 4=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x}}{4x}\cdot 4$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{1}{\cos 4x}\cdot 4=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 4x}\cdot 4=1\cdot\frac{1}{1}\cdot 4=4$　〃

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 8x}$

(別解)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 6x}{6x}\cdot 6x}{\dfrac{\sin 8x}{8x}\cdot 8x}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}}{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}}\cdot\frac{6}{8}=\frac{1}{1}\cdot\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$　〃

2. 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\cos^3 x$

(別解 1)　$y=\cos^3 x=(\cos x)^3$

$y'=3\cdot(\cos x)^{3-1}\cdot(\cos x)'=3\cdot(\cos x)^2\cdot(\cos x)'=3\cdot\cos^2 x\cdot(\cos x)'$

$=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x$　〃

(別解 2)　$y'=3\cdot\cos^2 x\cdot(\cos x)'=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x$　〃

(2) $y=\cot(3x-2)$

(別解)　$y'=-\mathrm{cosec}^2(3x-2)\cdot(3x-2)'=-\mathrm{cosec}^2(3x-2)\cdot 3$

$=-3\mathrm{cosec}^2(3x-2)=-\dfrac{3}{\sin^2(3x-2)}$　〃

(3) $y=\sin^4 2x$

(別解 1)　$y=\sin^4 2x=(\sin 2x)^4$

$y'=4\cdot(\sin 2x)^{4-1}\cdot(\sin 2x)'=4\cdot(\sin 2x)^3\cdot(\sin 2x)'=4\cdot\sin^3 2x\cdot(\sin 2x)'$

$=4\sin^3 2x\cdot\cos 2x\cdot(2x)'=4\sin^3 2x\cdot\cos 2x\cdot 2=8\sin^3 2x\cos 2x$　〃

(別解 2)　$y'=4\cdot\sin^3 2x\cdot(\sin 2x)'=4\sin^3 2x\cdot\cos 2x\cdot(2x)'$

$=4\sin^3 2x\cdot\cos 2x\cdot 2=8\sin^3 2x\cos 2x$　〃

《参考資料》　公式　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$