変数分離形　$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y) \implies \displaystyle\int \frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$

例 1.1　微分方程式　$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x(y^2+1)}{y(x^2+1)}=0$　について、次の問に答えよ。

(1)　一般解を求めよ。

(2)　初期条件「$x=1$ のとき $y=-2$」を満たす特殊解を求めよ。

[解]　(1)　$\dfrac{y}{y^2+1}dy=-\dfrac{x}{x^2+1}dx$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2y}{y^2+1}dy=-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

$\dfrac{1}{2}\log(y^2+1)=-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+c$

$\log(y^2+1)+\log(x^2+1)=2c$

$\log(x^2+1)(y^2+1)=2c$

$(x^2+1)(y^2+1)=e^{2c}$

$e^{2c}=C$　とおくと

$\therefore$　$(x^2+1)(y^2+1)=C$　（C は任意定数）　〃

これが求める一般解である。

(2) 一般解に $x=1, y=-2$ を代入すると

$(1^2+1)\{(-2)^2+1\}=C$

$\therefore$　$C=10$

$\therefore$　$(x^2+1)(y^2+1)=10$　〃

これが求める特殊解である。

例 1.2　微分方程式　$\sin x\sin^2 y-\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}=0$　の一般解を求めよ。

[解]　$\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}=\sin x\sin^2 y$

$\dfrac{1}{\sin^2 y}dy=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$　$\Longleftrightarrow$

$\displaystyle\int \mathrm{cosec}^2 y dy=\int \sec x\tan x dx$

$-\cot y=\sec x+c$

$-c=C$　とおくと、

$\therefore$　$\sec x+\cot y=C$　（C は任意定数）　〃

微分の公式

$(\cot\theta)'=-\mathrm{cosec}^2\theta$

$(\sec\theta)'=\sec\theta\tan\theta$

[別解]　$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 y}dy=\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$　$\Longleftrightarrow$

$-\dfrac{1}{\tan y}=\dfrac{1}{\cos x}+c$

$-c=C$　とおくと、

$\therefore$　$\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\tan y}=C$　（C は任意定数）　〃

公式の確認

$\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'$

$=\dfrac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$