変数分離形　$\dfrac{dy}{dx}=f(x) \quad \Longrightarrow \quad y=\displaystyle\int f(x)dx$

$\boxed{\text{例 2}}$ 微分方程式　$1-x\dfrac{dy}{dx}=x^2\dfrac{dy}{dx}$　について次の問に答えよ。

(1)　一般解を求めよ。

(2)　初期条件「$x=3$, $y=\log 5$」を満たす特殊解を求めよ。

[解] (1) $(x^2+x)\dfrac{dy}{dx}=1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x(x+1)}$$

$$y=\int\frac{1}{x(x+1)}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\log|x|-\log|x+1|+c$$

$$\therefore \quad y=\log\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$$

(c は任意定数)

$$\log\left|\frac{x}{x+1}\right|=y-c$$

$$\left|\frac{x}{x+1}\right|=e^{y-c}$$

$$\frac{x}{x+1}=\pm e^{y-c}$$

$$\frac{x}{x+1}=\pm e^{-c}e^{y}$$

$\pm e^{-c}=C$　とおくと、

$\therefore \dfrac{x}{x+1}=Ce^y$ (C は任意定数) 〃 $\cdots$①

これが求める一般解である。

(2) ①に $x=3$, $y=\log 5$ を代入して

$$\frac{3}{4}=Ce^{\log 5} \quad \therefore \frac{3}{4}=C\cdot 5 \quad \therefore C=\frac{3}{20}$$

これを①に代入すると、求める特殊解は

$$\therefore \quad \frac{x}{x+1}=\frac{3}{20}e^y$$ 〃

[別解] (1) $(x^2+x)\dfrac{dy}{dx}=1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x(x+1)}$$

$$dy=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\int dy=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$y=\log|x|-\log|x+1|+c$$

$$\therefore \quad y=\log\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$$

(c は任意定数)

$$\log\left|\frac{x}{x+1}\right|=y-c$$

$$\left|\frac{x}{x+1}\right|=e^{y-c}$$

$$\frac{x}{x+1}=\pm e^{y-c}$$

$$e^y=\mp\frac{1}{e^{-c}}\frac{x}{x+1}$$

$\mp\dfrac{1}{e^{-c}}=C$　とおくと、

$\therefore\ e^y=\dfrac{Cx}{x+1}$ (C は任意定数) 〃 $\cdots$②

これが求める一般解である。

(2) ② に $x=3$, $y=\log 5$ を代入して

$$e^{\log 5}=\frac{3C}{4} \quad \therefore 5=\frac{3C}{4} \quad \therefore C=\frac{20}{3}$$

これを②に代入すると、求める特殊解は

$$\therefore e^y=\frac{20x}{3(x+1)}$$ 〃