$$\text{変数分離形}\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = f(y) \quad\Longrightarrow\quad \mp\int\sqrt{\frac{1}{f(y)}}\,dy = \int dx$$

例 4　微分方程式　$y^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=1$　の一般解と特異解を求めよ。
また、それらは図形的に何を表しているか示せ。

[解]　$y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1-y^2$

$y \neq 0$ であるから、

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = dx$$

$$\mp\int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int dx$$

$$\mp\sqrt{1-y^2} = x + c \qquad (c\text{ は任意定数})$$

$$1-y^2 = (x+c)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 1 \qquad (c\text{ は任意定数})\quad〃$$

これが一般解である。
この一般解は中心が $x$ 軸上にあり、
半径１の円群を表す。

特異解を求めるために、
一般解の両辺を $c$ で偏微分 して

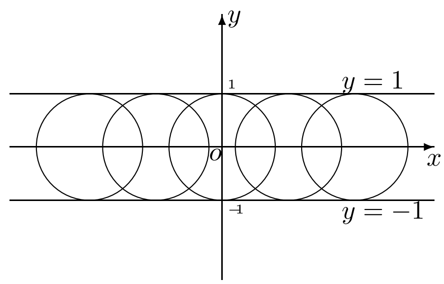
$$2(x+c) = 0$$

これと一般解から $c$ を消去して

$y^2 = 1$

$\therefore\quad y = \pm 1$　〃

これは与えられた微分方程式を満たし、かつ、
一般解の任意定数 $c$ にどんな値を代入しても
求められないから特異解である。
この特異解 $y = \pm 1$ は、
一般解の円群 $(x+c)^2 + y^2 = 1$ の包絡線を表す。




≪参考≫
特異解を直接求めたいとき

与えられた微分方程式で、

$\frac{dy}{dx} = p$　とおくと

$$y^2(1+p^2) = 1$$

$$y^2p^2 + (y^2-1) = 0$$

これを $p$ についての２次方程式と考え、
重解を持つ条件を求めると

$$\frac{D}{4} = 0^2 - y^2(y^2-1) = 0$$

$$y^2(y^2-1) = 0$$

$$\therefore\quad y = 0 \quad,\quad y = \pm 1$$

このうち、与えられた微分方程式を
満たすものを求めて

$y = \pm 1$　〃

これが求める特異解である。