$$\text{同次形}\qquad \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{y}{x}=g\left(\frac{dy}{dx}\right) \Leftrightarrow \frac{y}{x}=f(v)\ ,\ \frac{dy}{dx}=g(v)$$

例 5　微分方程式　$x\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right)=y$　の一般解を求めよ。

• $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$　と変形できるとき

[解 1]　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-1$

$\dfrac{y}{x}=u$　とおくと、　$\dfrac{dy}{dx}=u-1$

$y=xu$　より　$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$

$\therefore\quad u+x\dfrac{du}{dx}=u-1$

$\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{1}{x}$　　$\therefore\quad u=-\displaystyle\int\frac{1}{x}dx$

$\dfrac{y}{x}=-\log|x|+c$　$\cdots$　①

$\therefore\quad y=cx-x\log|x|$　(c は任意定数)　〃

≪参考≫

①から次のように変形してもよいでしょう。

$\log|x|=-\dfrac{y}{x}+c$

$|x|=e^{-\frac{y}{x}+c}$　　$\therefore\quad x=\pm e^{c}e^{-\frac{y}{x}}$

$\pm e^{c}=C$　とおくと、

$\therefore\quad x=Ce^{-\frac{y}{x}}$　(C は任意定数)　〃

• $\dfrac{y}{x}=f\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$　と変形できるとき

[解 2]　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{dy}{dx}+1$

$\dfrac{dy}{dx}=p$　とおくと、

$\dfrac{y}{x}=p+1$　$\cdots$　②

$y=x(p+1)$　より　$\dfrac{dy}{dx}=(p+1)+x\dfrac{dp}{dx}$

$\therefore\quad p=p+1+x\dfrac{dp}{dx}$

$\dfrac{dp}{dx}=-\dfrac{1}{x}$　　$\therefore\quad p=-\displaystyle\int\frac{1}{x}dx$

$p=-\log|x|+c$　$\cdots$　③

②と③から、p を消去して

$\dfrac{y}{x}-1=-\log|x|+c$

$c+1=C$　とおくと

$\dfrac{y}{x}=-\log|x|+C$

$\therefore\quad y=Cx-x\log|x|$　(C は任意定数)　〃

• $\dfrac{y}{x}=f(v)\ ,\ \dfrac{dy}{dx}=g(v)$　と変形できるとき

[解 3]

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=\sin v+1\\[2mm] \dfrac{dy}{dx}=\sin v\end{cases} \quad\Leftarrow$$

sin v を単に v とすると
解 2 と同じになるので
わざと複雑にした。

$y=x(\sin v+1)$

$\dfrac{dy}{dx}=\sin v+1+x\cos v\dfrac{dv}{dx}$

$\therefore \sin v+1+x\cos v\dfrac{dv}{dx}=\sin v$

$x\cos v\dfrac{dv}{dx}=-1$　　$\therefore \cos v\,dv=-\dfrac{1}{x}dx$

$\displaystyle\int\cos v\,dv=-\int\frac{1}{x}dx$

$\sin v=-\log|x|+c$

$\therefore\quad \dfrac{y}{x}-1=-\log|x|+c$

$c+1=C$ とおくと

$\dfrac{y}{x}=-\log|x|+C$

$\therefore\quad y=Cx-x\log|x|$　(C は任意定数)　〃