同次形　$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right) \implies \dfrac{y}{x}=u$　とおく

例 6　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$y^2+(x^2-xy)\dfrac{dy}{dx}=0$

(2)　$y+\sqrt{x^2+y^2}=x\dfrac{dy}{dx}$

(解)

(1) $x\neq 0$ のとき、両辺を x^2 で割ると

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

$\dfrac{y}{x}=u$　とおくと、

$$u^2+(1-u)\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots \quad ①$$

$y=xu$　より　$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx} \quad \cdots \quad ②$

②を① に代入して

$$u^2+(1-u)\left(u+x\frac{du}{dx}\right)=0$$

$$\therefore \quad x(u-1)\frac{du}{dx}=u$$

$$\frac{u-1}{u}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \quad \int\left(1-\frac{1}{u}du\right)=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \quad u-\log|u|=\log|x|+c$$

$$u=\log|u|+\log|x|+c$$

$$\therefore \quad u=\log|xu|+c$$

これと $\dfrac{y}{x}=u$ より

$$\frac{y}{x}=\log|y|+c$$

$$\log|y|=\frac{y}{x}-c$$

$$\therefore \quad |y|=e^{\frac{y}{x}-c}$$

$$y=\pm e^{-c}e^{\frac{y}{x}}$$

$\pm e^{-c}=C$ とおくと

$\therefore \quad y=Ce^{\frac{y}{x}}$　(C は任意定数)　〃

(2) $x\neq 0$ のとき、両辺を x で割ると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$\dfrac{y}{x}=u$ とおくと、$\dfrac{dy}{dx}=u+\sqrt{1+u^2}\cdots ①$

$y=xu$ より　$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$

$$\therefore x\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2}$$

$$\therefore \int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \quad \log|u+\sqrt{1+u^2}|=\log|x|+c$$

$$\log\left|\frac{u+\sqrt{1+u^2}}{x}\right|=c$$

$$\therefore \frac{u+\sqrt{1+u^2}}{x}=\pm e^c$$

$\pm e^c=c_1$ とおくと

$u+\sqrt{1+u^2}=c_1x \quad \cdots \quad ②$

$\dfrac{y}{x}=u$ より、$\dfrac{y}{x}=\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=c_1x$

$y+\sqrt{x^2+y^2}=c_1x^2 \quad \cdots \quad ③$

①，②から　$\dfrac{dy}{dx}=c_1x$

$$y=\int c_1xdx=\frac{1}{2}c_1x^2+c_2$$

$\therefore c_1x^2=2y-2c_2$　これを ③ に代入して

$$y=\sqrt{x^2+y^2}=2(y-c_2)$$

$-2c_2=C$　とおくと　$\sqrt{x^2+y^2}=y+C$

$\therefore \quad x^2+y^2=(y+C)^2$　(C は任意定数)　〃