

同次形 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \implies \frac{y}{x} = u$ とおく

例 7 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $5xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

(2) $xy^2 \frac{dy}{dx} = x^3 + y^3$

(解)

(1) $x \neq 0$ のとき、両辺を x^2 で割ると

$$5 \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\frac{y}{x} = u \text{ とおくと } 5u \frac{dy}{dx} = 1 + u^2 \dots \textcircled{1}$$

$$y = xu \text{ より } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入して

$$5u \left(u + x \frac{du}{dx} \right) = 1 + u^2$$

$$5ux \frac{du}{dx} = 1 - 4u^2$$

$$\frac{5u}{1 - 4u^2} du = \frac{1}{x} dx$$

$$-\frac{5}{8} \int \frac{8u}{4u^2 - 1} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\frac{5}{8} \log |4u^2 - 1| = \log |x| + c$$

$$8 \log |x| + 5 \log \left| 4 \frac{y^2}{x^2} - 1 \right| = -c$$

$$\log \left| x^8 \left(4 \frac{y^2}{x^2} - 1 \right)^5 \right| = -c$$

$$\log \left| \frac{1}{x^2} (y^2 - x^2)^5 \right| = -c$$

$$\left| \frac{(y^2 - x^2)^5}{x^2} \right| = e^{-c}$$

$$\frac{(y^2 - x^2)^5}{x^2} = \pm e^{-c}$$

$\pm e^{-c} = C$ とおくと

$$(4y^2 - x^2)^5 = Cx^2 \quad (C \text{ は任意定数}) \quad "$$

これが求める一般解である。

(2) $x \neq 0$ のとき、両辺を x^3 で割ると

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{y}{x} = u \text{ とおくと、} \frac{dy}{dx} = \frac{1 + u^3}{u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u^2} + u$$

$$y = xu \text{ より } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2}$$

$$\int u^2 du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{3} u^3 = \log |x| + c$$

$$\frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} = \log |x| + c \dots \textcircled{1}$$

$c = \log C$ とおくと

$$\frac{y^3}{3x^3} = \log |x| + \log C$$

$$\frac{y^3}{3x^3} = \log C |x|$$

$$y^3 = 3x^3 \log C |x| \quad (C \text{ は任意定数}) \quad "$$

参考 ①から、次のようにしてもよい。

$$\log |x| = e^{\frac{y^3}{3x^3} - c} \quad x = \pm e^{-c} e^{\frac{y^3}{3x^3}}$$

$\pm e^{-c} = C$ とおくと

$$x = C e^{\frac{y^3}{3x^3}} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad "$$